Bósgas

Fyrir bósgasið höfum við

$$N = \frac{(2S+1)V}{\lambda_{th}^3} Li_{3/2}(z)$$

$$U = \frac{3}{2} N k_B T \frac{Li_{5/2}(z)}{Li_{3/2}(z)}$$

Ef $\mu = 0 \rightarrow z = 1$

og $Li_n(1) = \zeta(n)$

$$N = \frac{(2S+1)V}{\lambda_{th}^3} \underbrace{\zeta(\tfrac{3}{2})}_{2,612}$$

$$U = \frac{3}{2} N k_B T \underbrace{\frac{\zeta(\frac{5}{2})}{\zeta(\frac{3}{2})}}_{0,513}$$

Skoðum bósgas með

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

(ekki ljóseindir)

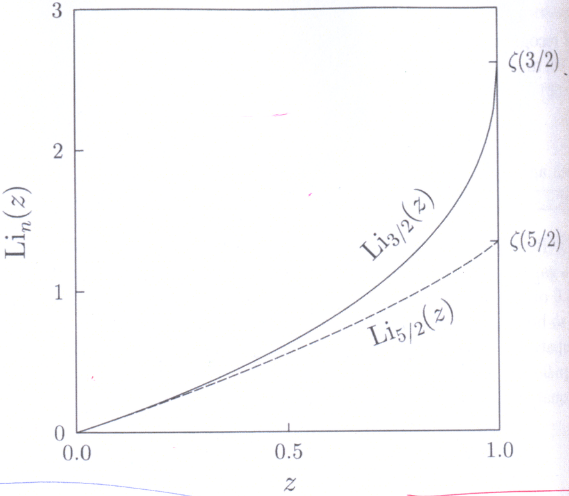
Lægsta orkan er 0

$\rightarrow \mu < 0$

$0 < z < 1$, $z = e^{\beta\mu}$

$$\frac{n \lambda_{th}^3}{2S+1} = Li_{3/2}(z)$$

$n = \frac{N}{V}$; $\lambda_{th} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$



hægrihliðin er takmörkuð !

$$\frac{n\lambda_{th}^{3}}{2S+1} = \mathrm{Li}_{3/2}(z)$$

$0 < z < 1$

$\mu < 0$

vinstri hliðin er ótakmörkuð
n getur vaxið, eða λ_{th}
þegar $T \to 0$

Vandinn birtist þegar við breytum summu yfir í heildi og vörum með $g(E) \sim \sqrt{E}$!

Lægsta ástandið með $k = 0$ eða $E = 0$ gæti orðið mikið setið, en við erum búin að loka fyrir það.

Þetta fer að gerast við markhitastigið

$$k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\left(\frac{n}{2.612\,(2S+1)}\right)^{2/3}$$

↑ þegar vinstri hliðin í jöfnunni fyrir N verður stærri en max-gildi hægri hliðarinnar

Lausn

Setjum $N = N_0 + N_1$

þar sem N_0 er setni grunnástandsins

$$N_0 = \frac{1}{z^{-1} - 1} = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}$$

með $E = 0$, og N_1 er setni allra hinna ástandanna

$$N_1 = \frac{(2S+1)V}{\lambda_{th}^3}\, Li_{3/2}(z)$$

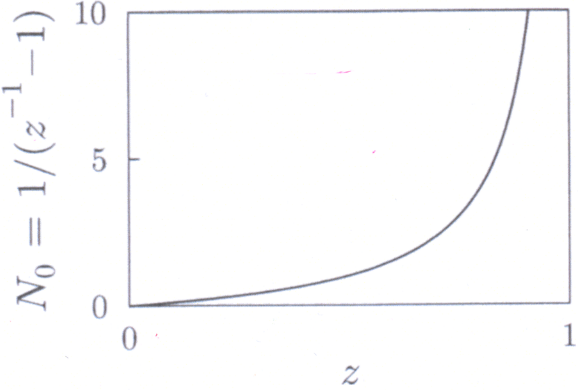
Fyrir $T > T_c$, $z < 1$

og N_0 endir í grunnástandinu

þ.a.

$$N_0 \ll N = N_1$$

$N_0(z)$



hæsta n sem getur komist í ÖLL ástöndin með $\mu = 0$, $z = 1$

í örvuðu ástöndin því við búumst við $N_0 << N = N_1$ og sleppum N_0

Fyrir $T = T_c^+$

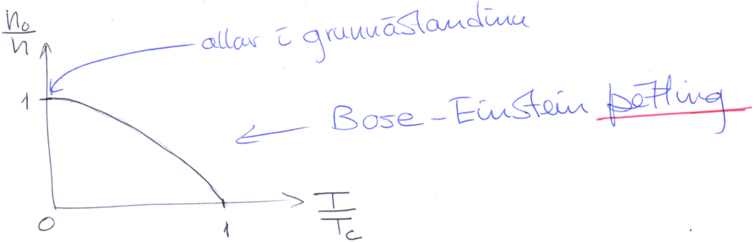
$$n = \frac{N}{V} \quad \frac{(2S+1)\, Li_{3/2}(1)}{[\lambda_{th}(T_c)]^3} = \frac{(2S+1)\,\zeta(\frac{3}{2})}{[\lambda_{th}(T_c)]^3}.$$

Fyrir $T < T_c$ er $z \sim 1$ og við gerum ráð fyrir að $z = 1$

$$\rightarrow \quad n_1 = \frac{N_1}{V} \frac{(2s+1)\,\zeta(\frac{3}{2})}{[\lambda_{th}(T)]^3}$$

og afgangur eindanna verður að vera í grunnástandinu

$$\frac{n_0}{n} = \frac{n - n_1}{n} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$



þétting í ástandsrúminu í grunnástandið

sammenbinder a

$$\frac{N}{V} = \frac{(2S+1)\,\mathrm{Li}_{3/2}(z)}{\lambda_{th}^3}$$

og

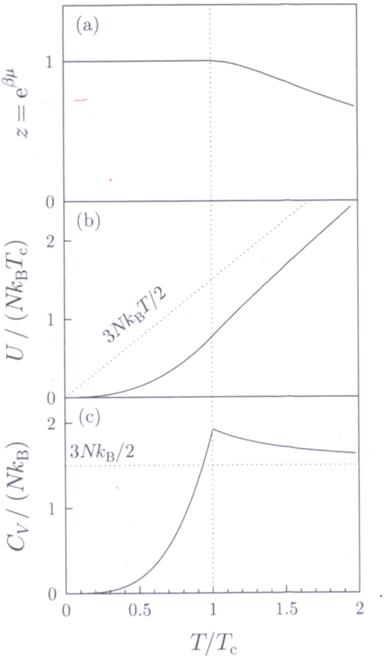
$$n = \frac{N}{V} = \frac{(2S+1)\,\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\left[\lambda_{th}(T_c)\right]^3}$$

leder til

$$\frac{T}{T_c} = \left[\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\mathrm{Li}_{3/2}(z)}\right]^{2/3}$$

$\downarrow$

numerisk gir z



$T \leq T_c$

$$U = \frac{3}{2} N_1 k_B T \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{3}{2} N k_B T \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{T_c}{T}\right)^{3/2}$$

$$\approx 0{,}77\, N k_B T_c \left(\frac{T}{T_c}\right)^{5/2}$$

$T > T_c$

$$U = \frac{3}{2} N k_B T \frac{\mathrm{Li}_{5/2}(z)}{\mathrm{Li}_{3/2}(z)}$$

^4He upphafleg a → ofurflæði $T_c = 3.1$ K

en víxlverkun er ekki hverfandi . . . .

Alkali-málm atóm $T_c = 10^{-8} - 10^{-6}$ K

$10^4 - 10^6$ atóm . . . . . .

Cooper pör í ofurleiðara . . . . .

BCS – líkanið

Háhita ofurleiðarar . . . . . .

↑ stórsæ skammtahrif

Hljóðeindir

sveiflur atóma í kristallagrind

óháðir sveiflukottir ⟺ nálgum sem hreintóna sveifla

skoðum fyrst tvö einföld líkön

Líkan Einsteins

3N sveiflukottir, allir með tíðni ω_E, óháðir . . .

$$Z = \prod_{k=1}^{3N} Z_k \quad \rightarrow \ln Z = \sum_{k=1}^{3N} \ln Z_k$$

$$Z_k = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_E\beta} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\hbar\omega_E\beta}}{1 - e^{-\hbar\omega_E\beta}}$$

Allir hattirnir eru eins, með tíðni ω_E

$$\to Z = (Z_k)^{3N} \to \ln Z = 3N\left\{-\frac{1}{2}\hbar\omega_E\beta - \ln\left(1-e^{-\hbar\omega_E\beta}\right)\right\}$$

og því

$$U = -\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right) = 3N\left\{\frac{\hbar\omega_E}{2} + \frac{\hbar\omega_E e^{-\hbar\omega_E\beta}}{1-e^{-\hbar\omega_E\beta}}\right\}$$

$$= 3N\left\{\frac{\hbar\omega_E}{2} + \frac{\hbar\omega_E}{1-e^{-\hbar\omega_E\beta}}\right\}$$

setjum

$$\hbar\omega_E = k_B\Theta_E$$ hita stig

$$\to U = 3R\Theta_E\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\Theta_E/T}-1}\right\}$$ fyrir mól efnis

Athugum varmarýmd

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) = 3R\Theta_E \frac{-1}{\left(e^{\frac{\Theta_E}{T}} - 1\right)^2} e^{\frac{\Theta_E}{T}} \left\{-\frac{\Theta_E}{T^2}\right\}$$

$$= \frac{3R x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \quad \text{ef} \quad x = \frac{\Theta_E}{T}$$

þ. $T \to 0$, $x \to \infty \Rightarrow C \to \underbrace{3Rx^2 e^{-x}}$

þ. $T \to \infty$, $x \to 0 \Rightarrow C \to 3R \leftarrow$ Dulong-Petit reglan

Allir sveifluhættir virkir við hátt T

Stefnir hratt á 0
þ. $T \to 0$

Líkan Debye

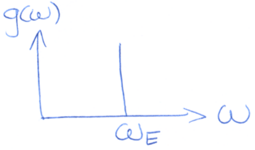
Álitlegt að allir sveifluhættir hafi sömu tíðni, en getum búist við

$$\int g(\omega)\,d\omega = 3N$$

ástandaþéttleiki sveifluhátta

fyrir líkan Einsteins fæst

$$g_{Einst.}(\omega) = 3N\delta(\omega - \omega_E)$$



Debye gerði ráð fyrir hljóðbylgjum

hljóðhraði í efninu

$$\omega = v_s q$$

bylgjuvigur

þá fæst

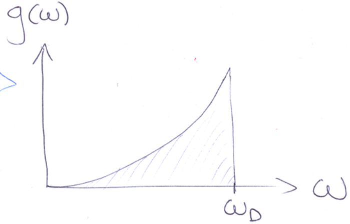
$$g(q)\,dq = \frac{4\pi q^2\,dq}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} \times 3$$

skautanir bylgju tvær þvert á q, og ein langs

$$q = \frac{\omega}{v_s} \longrightarrow g(\omega)d\omega = \frac{3V\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v_s}$$

Þurfum því max tíðni ω_D þ.a.

$$\int_0^{\omega_D} d\omega\, g(\omega) = 3N \longrightarrow \omega_D = \left(\frac{6N\pi^2 v_s}{V}\right)^{1/3}$$



$$g(\omega)d\omega = \frac{9N\omega^2 d\omega}{\omega_D^3}$$

Skilgreinum $\Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B}$

Þegar $T >> \Theta_D$ eru allir sveifluhættir virkir í kristallinum