

09.21.62 Skammtafræði 2

Tíma- og heimadæmi

Kennari: Viðar Guðmundsson

Til umfjöllunar 9. og 16. mars:

1. Virki Hamiltons fyrir jöfnu Diracs er

$$H = \int d^3x \psi^\dagger \left(-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta mc^2 \right) \psi.$$

(a) Sviðsvirkjann ψ má liða sem

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}, \lambda=1,2} \left(b_{\mathbf{p}\lambda} u_{\mathbf{p}\lambda} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} + c_{\mathbf{p}\lambda}^\dagger u_{-\mathbf{p}-\lambda} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \right),$$

þar sem $b_{\mathbf{p}\lambda}$ og $c_{\mathbf{p}\lambda}$ eru eyðingarvirkjar fyrir fermíeind og andeind hennar. Spunaástöndin tvö eru merkt með $\lambda = 1, 2$. Sýnið að virkja Hamiltons er hægt að skrifa sem

$$H = \sum_{\mathbf{p}, \lambda=1,2} E_p \left(b_{\mathbf{p}\lambda}^\dagger b_{\mathbf{p}\lambda} + c_{\mathbf{p}\lambda}^\dagger c_{\mathbf{p}\lambda} \right).$$

2. Virki Hamiltons

$$H = a_k^\dagger a_k + a_l^\dagger a_l + g \left[a_0^\dagger a_0 \left(a_k^\dagger a_k + a_l^\dagger a_l \right) + a_0^2 a_l^\dagger a_k^\dagger + a_0^{\dagger 2} a_k a_l \right]$$

lýsir bóseindakerfi með N eindum. $l \neq k$, $l \neq 0$ og $k \neq 0$.

(a) Sýnið að hægt sé að setja Hamiltonvirkjann á hornalínuform þannig að

$$H_D = \sqrt{1 + 2gN} - 1 - gN + \sqrt{1 + 2gN} \left(A_k^\dagger A_k + A_l^\dagger A_l \right),$$

þar sem A er eyðingarvirki nýrrar sýndareindar.

(b) Sýnið að virkjarnir $N = a_0^\dagger a_0 + a_k^\dagger a_k + a_l^\dagger a_l$ og $\Delta = a_k^\dagger a_k - a_l^\dagger a_l$ séu hreyfingarfastar og ennfremur að $[N, \Delta] = 0$.

(c) Ef n er fjöldi einda í ástandinu k sýnið að Hamiltonvirkjann megi þá skrifa sem fall af Δ , N og n .