

09.21.62 Skammtafræði 2

Heimtökupróf frá mánudegi 10. maí kl. 10:00 til miðvikudags 12. maí kl. 12:00, 2004. Í heimtökuprófi skiptir höfuðmáli að lausnir séu setta fram á skýran hátt með stuttum skýringatextum á milli útleiðslna. **Á prófinu eru 5 dæmi.**

Öll hjálpargögn eru leyfileg, en ætlast er til að hver nemandi leysi prófið einn án hjálpar frá öðrum.

1. Kannið hvort Klein-Gordon jafnan nýtist til að reikna orkuróf bundinna ástanda mættisins

$$V(x) = V_0\delta(x),$$

ef það er túlkað sem skammseilið rafmætti í einni vídd.

2. Kerfi með tveimur tegundum bóseinda er lýst með virkja Hamiltons

$$H = \hbar\Omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left(c^\dagger c + \frac{1}{2} \right) + \lambda a^\dagger a (c^\dagger + c).$$

Finnið orkuróf kerfisins.

3. Sýnið að kvarðabreyting vigurmættisins $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) + \nabla\chi(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ krefjst þess að lausn jöfnu Schrödingers ummyndist sem

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\chi(\mathbf{r}, t)\right)\psi(\mathbf{r}, t)$$

4. Einsleitt tvívítt rafeindakerfi er í föstu ytra segulsviði og nákvæmlega fyrsta stig Landaus er setið.

(a) Finnið Green-fallið $G(x, x')$ fyrir kerfið.

(b) Nú gildir að rafeindabéttleiki kerfis er tengdur Green-fallinu með jöfnunni, $\langle n \rangle = -iG(\mathbf{x}t, \mathbf{x}t^+)$. Athugið þetta fyrir Green-fall þrívíðs einsleits rafeindakerfis án ytra segulsviðs og reynið síðan að nota þessa jöfnu til þess að reikna rafeindabéttleika tvívíða kerfisins í ytra segulsviðinu.¹

¹Hér skulum við sleppa spuna og muna eftir að þá gæti skeikað um stuðul 2 miðað við þekktar niðurstöður.

5. Finnið orkuróf rafeindar sem aðeins getur ferðast um $x - y$ -sléttuna í þverstæðu föstu segulsviði $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ og fasta rafsviðinu $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$. Hvernig breytast stig Landaus þegar E_0 er látið vaxa? Hér getur verið þægilegt að rissa up graf til skýringar.²

²Hér skiptir máli að velja kvarða fyrir vigurmættið sem fellur vel að eiginleikum rafsviðsins, eða rafmættinu sem lýsir því.