

EÐL401G Rafsegulfræði 1

Vorpróf 2025, Kennari: Viðar Guðmundsson.

Leyfileg hjálpargögn eru skrifari, tölvur, öll prentuð og skrifuð gögn á pappír eða rafrænum ham, vafrar, vasareiknivélar, algebru- og grafíkforrit.

Í prófinu eru 3 verkefni sem öll vega jafnt. Skrifið skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefni eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

- Nemandi má ekki þiggja aðstoð frá öðrum en kennara námskeiðsins.
- Nemendur mega koma með fyrirspurnir á tölvupóstfangið `vidar@hi.is`.
- Ekki má sýna neinum prófverkefnið eða dreifa því meðan á prófinu stendur.
- Nemendur mega ekki hafa neitt samband sín á milli meðan á prófinu stendur.

Ég geri mér grein fyrir því að kennari hefur fullan rétt til þess að fresta einkunnargjöf um óákveðinn tíma og krefja mig skýringa á úrlausn minni síðar, ef hann grunar að ég hafi ekki fylgt reglum um próftöku.

Ég skil að brot á reglum Háskóla Íslands getur haft í för með sér þung viðurlög eins og fall í námskeiði, en einnig áminningu eða brottvikningu úr skóla, tímabundið eða fyrir fullt og allt.

Kennari treystir nemanda til þess að fylgja öllum reglum, vanda úrlausn sína, leggja sig allan fram og láta sér ekki til hugar koma að svindla á prófinu. Með skil á úrlausn undirgengst nemandi þessi skilyrði.

1. **Íslenska:** Tvær sammiðja kjörleiðandi þunnar kúluskeljar með geisla a og $2a$ bera hleðslurnar $-Q$ og $+Q$. Bilið milli skeljanna er fyllt með rafsvara með

$$\epsilon(r) = \frac{2a\epsilon_0}{3a - r}.$$

- (a) Notið lögmál Gauss til að finna $\mathbf{D}$.
- (b) Finnið yfirborðs- og bolskautunarhleðslur í kerfinu.
- (c) Finnið heildarrafstöðuorku kerfisins.
- (d) Finnið rýmd kerfisins.

English: Two concentric ideally conducting thin spherical shells with radii a and $2a$ carry the charges $-Q$ and $+Q$. The space between the shells is filled with a dielectric material with

$$\epsilon(r) = \frac{2a\epsilon_0}{3a - r}.$$

- (a) Use Gauss law to find $\mathbf{D}$.
- (b) Find the surface and bulk polarized charges in the system.
- (c) Find the total electrostatic energy of the system.
- (d) Find the capacitance of the system.

2. **Íslenska:** Vigurmætti er gefið sem

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \Psi(r, t)\mathbf{a}_z \quad \text{með} \quad \Psi(r, t) = \frac{C \exp[i(kr - \omega t)]}{r},$$

þar sem r er útpáttur kúlunnita.

- (a) Finnið $\mathbf{B}$ og $\mathbf{E}$.
- (b) Aðfellaform vigurmættisins er $1/r$ þegar r verður mjög stórt. Því mætti búast við að aðfellaform $\mathbf{B}$ og $\mathbf{E}$ yrði $1/r^2$ þar sem sviðin tengjast vigursviðinu í gegnum afleiður. Sýnið að þetta er ekki rétt, aðfellaform $\mathbf{B}$ og $\mathbf{E}$ er í raun $1/r$.
- (c) Hvaðan kemur þessi þáttur, $1/r$, í aðfellaform $\mathbf{B}$ og $\mathbf{E}$?

English: A vector potential is given by

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \Psi(r, t)\mathbf{a}_z \quad \text{með} \quad \Psi(r, t) = \frac{C \exp[i(kr - \omega t)]}{r},$$

with r the radial coordinate in a spherical coordinate system.

- (a) Find $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$.
- (b) The asymptotic form of the vector potential is $1/r$ when r becomes large. Therefore we might expect the asymptotic forms of $\mathbf{B}$ og $\mathbf{E}$ to be $1/r^2$ as the fields are derived from the vector potential with derivatives. Show that this is not correct, the asymptotic form of $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$ is really $1/r$.
- (c) What is the origin of this component, $1/r$, of the asymptotics of $\mathbf{B}$ og $\mathbf{E}$?

3. **Íslenska:** Einn daginn gerist hið óvænta: Fjölmíðlar heimsins greina frá því að ljóseindin hafi örlítinn massa. Þú rifjar upp það sem þú lærðir í HÍ á sínum tíma og manst eftir því að kennarinn hélt því fram að þá breytist mætti Coulombs fyrir punkt hleðslu q í mætti Yukawa

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\mu r},$$

þar sem μ er jákvæður lítill fasti háður massa ljóseindarinnar.

- (a) Breytist rafstöðuafnan $\nabla \times \mathbf{E} = 0$?
- (b) Til að finna út hvernig lögmál Gauss gæti breyst skaltu reikna flæðið frá punkthleðslu í gegnum kúluflot með miðju í staðsetningu hleðslunnar.
- (c) Næst er heppilegt að heilda mættið yfir rúmmálið innan yfirborðs Gauss í liðnum á undan.
- (d) Tekst þér að nýta upplýsingarnar úr liðunum tveimur hér að framan til að giska á heppilegt heildisform af lögmáli Gauss fyrir ljóseindir með massa? Þetta er ekki fullkomin sönnun, en bendir á rétta lausn.

English: One day the unexpected happens: The media of the world report that the photon has been found to have a tiny mass. Your thought go back to what you learned at the U of I and you remember that the teacher stated that then the Coulomb potential for a point charge q might change into the Yukawa potential

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\mu r},$$

where μ is a positive small constant depending on the mass of the photon.

- (a) Would the electrostatic equation $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ change?
- (b) To find out how the Gauss law might change you should calculate the flux from a point charge through a spherical surface with center at the location of the charge.
- (c) Next is convenient to integrate the potential over the volume bounded by the Gauss surface in the item above.
- (d) Can you manage to combine the results of the two items above to construct a possible Gauss law, in integral form, for photons with a mass? This is not a complete prove, but it points to the correct solution.