Rafsegulfræði

Fyrirlestrar / Dæmatímar → Viðar Guðmundsson
vidar@hi.is

Canvas + opnir vefir

https://vidargudmundsson.org/Nam/RFS/RFS_1.html
https://vidar.hi.is/Nam/RFS/RFS_1.html

Heimadæmi: gilda 30% í lokaeinkunn

Bók: D.J. Griffiths, Electrodynamics

	Yfirlit					11+
2, 4	Rafstöðusvið	1v	5, 6	Segulstöðufræði	2v	Geislun
3	Lausnir rafst. verk.	1.5v	7, 8	Tímaháð svið	2v	dreifing
5.1.3+	Straumar	0.5v	8, 9	Rafsegulbylgjur	2v	dofnun
			9	Bylgjustokkar, hol	1v	1v
			10+	Geislun, loftnet	1v	

Rafstöðufræði

(2)

Rafsvið skilgreint frá kraftsviði

$$\boxed{\bar{E} = \lim_{q\to 0} \frac{\bar{F}}{q}}$$

með tilraunahleðslu q

↓

Kraftur á hleðslu q í rafsviði $\bar{E}$

$$\boxed{\bar{F} = q\bar{E}}$$

Eiginleikar rafsviðs (rafstöðusviðs) eru skilgreindir með tveimur (Maxwells) jöfnum (í "tómarúmi")

$$\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

hleðsluþéttleiki

rafsvörunarfasti tómarúms

$$\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{E} = 0}$$

Hér má lesa úr jöfnunum: Rafsvið á sér uppsprettur, Rafsviðslínur í tómarúmi í rafstöðufræði eru ekki lokaðar lykkjur.

(3)

Stokes regla fyrir snúningslaust eða geymið svið og „sundurleitni reglan" gefa heildisframsetningu

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \longleftrightarrow \boxed{\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}} \quad \text{Gauss}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = 0 \longleftrightarrow \boxed{\oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0}$$

flæði rafsviðs út um lokað yfirborð er í réttu hlutfalli við heildarhleðsluna innan þess.

Heildissvið ⟷ Afleiðusvið

Coulomb

(4)

Ein jákvæð punkthleðsla

+q

Eins átta rafsvið út úr fleti

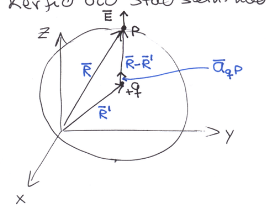
$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \oint_S (\bar{a}_R E_R)\cdot\bar{a}_R ds = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E_R (4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

E_R einsleitt á kúluyfirborðinu

$$\boxed{\bar{E} = \bar{a}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}}$$

Miðum ekki alltaf hnitakerfið við staðsetn. hleðslu



$$\bar{E}_P = \bar{a}_{qP}\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\bar{R}-\bar{R}'|^2} = \bar{E}(\bar{R})$$

5

Einingarvigurinn er skrifanlegur sem

$$\bar{a}_{qP} = \frac{\bar{R}-\bar{R}'}{|\bar{R}-\bar{R}'|}$$

$\rightarrow$

$$\boxed{\bar{E}_P = \bar{E}(\bar{R}) = \frac{q(\bar{R}-\bar{R}')}{4\pi\epsilon_0|\bar{R}-\bar{R}'|^3}}$$

Langseilinn rafkraftur endurspeglar:

* Ljóseind er massalaus
* Ljóseindir víxlverkast ekki innbyrðis

Rafsvið hleðslusafns

$$\bar{E}(\bar{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k(\bar{R}-\bar{R}'_k)}{|\bar{R}-\bar{R}'_k|^3}$$

n-hleðslur q_k í hnitum $\bar{R}'_k$ við reiknum rafsviðið $\bar{E}(\bar{R})$ í punkti $\bar{R}$

6

Samfelld hleðsludreifing

$$\bar{E}(\bar{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} dv' \frac{\rho(\bar{R}')(\bar{R}-\bar{R}')}{|\bar{R}-\bar{R}'|^3}$$

$\rho(\bar{R}')$: hleðsluþéttleiki

fyrir yfirborðshleðsluþéttleika $\rho_s(\bar{R})$ (eða $\sigma(\bar{R})$) er rafsviðið

$$\bar{E}(\bar{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'} ds' \frac{\rho(\bar{R}')(\bar{R}-\bar{R}')}{|\bar{R}-\bar{R}'|^3}$$

Venjulega er þægilegra að reikna fyrst rafmættið sem við athugum bráðlega.
(Athugasemd um heildun í bók)

7

Lögmál Gauss

$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Heildarflæði $\bar{E}$ út um lokað yfirborð er jafnt heildarhleðslu Q innan þess margf. með $1/\epsilon_0$

lesa sjálf í bók. Ákaflega mikilvægt fyrir hleðsludreif. með háa samhverfu.

Við skoðum tvær afleiðingar

Hleðsludreifing, kúlusamhverf, $\rho(r)$

$$\rho(\bar{r}) = \begin{cases} \rho(r) & \text{ef } r \leq a_0 \\ 0 & \text{ef } r > a_0 \end{cases}$$

Athugum rafsviðið utan hleðsludreifingarinnar í fjarlægð $r > a_0$

Hleðsludreifingin er kúlusamhverf $\rightarrow$ rafsviðið getur aðeins verið "radíalt" og fast á kúluflöti með sömu miðju...

8

$$\int dv\, \rho(\bar{r}) = Q$$

Einingarvigur í "radial" eða útstefnu í bók $\hat{r} = \bar{a}_R$

$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \bar{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Í þessu tilfelli er rafsviðið óháð nákvæmri dreifingu hleðslunnar. Sama rafsvið og punkthleðsla Q myndi valda!

Óhlaðið H-atóm

Er rafsvið í kringum það?

* Gerum ráð fyrir að kjarnhleðslan sé punkthleðsla $+e$
* Í grunnástandi er hleðsludreifing rafeindarinnar $\rho_e(r) \sim A e^{-2\alpha r}$ þar sem A og α eru þekktir stuðlar

Atómið er <u>óhlaðið</u> $\rightarrow \int_{\text{allt rúmið}} dv\, \rho_e(\bar{r}) = -e$

(9)

* Hugsum okkur kúluyfirborð með geisla r
* Innan þess er alltaf endanleg jákvæð hleðsla fyrir endanlegt r (hluti ρ_e er utan þessa yfirborðs).
* Það er því alltaf endanlegt rafsvið $\rightarrow$ Kraftur fyrir „utan" H-atóm
* Krafturinn er skammseilinn, fellur með veldisvísisfalli, miklu hraðar en Coulomb-krafturinn fyrir, +e punkthleðslu eða fyrir tvípól

$\oplus$ +e

$\ominus$ -e

Rafstöðumætti

(10)

Um rafstöðusvið gildir $\bar{\nabla}\times\bar{E} = 0$

Almennt gildir fyrir skalarsvið V

$$\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}V) \equiv 0$$

Því er hægt að finna skalarsvið V þannig að

$$\boxed{\bar{E} = -\bar{\nabla}V}$$

Í 4. kafla eru kynntar aðferðir t.þ.a. reikna $V(\bar{r})$ sem eru einfaldari oftast en að reikna $\bar{E}(\bar{r})$ beint.

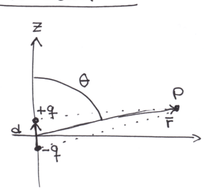
(11)

Spennumunur í rafstöðumætti er

$$V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \bar{E}\cdot d\bar{l} \qquad \text{óháð leið}$$

$V_2 - V_1 = \dfrac{W}{q}$ { er vinnan sem þarf t.þ.a. færa einingarhleðslu frá P_1 til P_2 í rafsviðinu $\bar{E}$

Tvískaut



$$V_P = V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{k=1}^{2}\frac{q_k}{|\bar{r}-\bar{r}_k'|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{|\bar{r}-\bar{d}/2|} - \frac{1}{|\bar{r}+\bar{d}/2|}\right\}$$

(12)

$\bar{r} - \frac{\bar{d}}{2} = \left(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta - \frac{d}{2}\right)$ í Kartískum hn.

$$\left|\bar{r}-\frac{\bar{d}}{2}\right| = \left(r^2\sin^2\theta + \left(r\cos\theta - \frac{d}{2}\right)^2\right)^{1/2} = \left(r^2 - dr\cos\theta + \frac{d^2}{4}\right)^{1/2}$$

$$= r\left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{1/2} \simeq r\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right) \text{ ef } r \gg d$$

$$\frac{1}{|\bar{r}-\bar{d}/2|} - \frac{1}{|\bar{r}+\bar{d}/2|} \simeq \left\{\frac{1}{r}\left(1+\frac{d}{2r}\cos\theta\right) - \frac{1}{r}\left(1-\frac{d}{2r}\cos\theta\right)\right\}$$

$$= \frac{d\cos\theta}{r^2}$$

$$\rightarrow V_P = V(\bar{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{\bar{p}\cdot\hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\bar{p} = q\bar{d}$$

(13)

Rafsviðið fæst með

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V = -\hat{a}_R \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{a}_\theta \frac{\partial V}{r\partial \theta}$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left\{\hat{a}_R\, 2\cos\theta + \hat{a}_\theta \sin\theta\right\}$$

(1)

Leiðari í rafstöðusviði

Stórsær skali, slökunartími

Í jafnvægi gildir innan leiðara

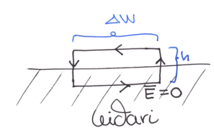
$\rho = 0$

$\bar{E} = 0$

Leiðari getur verið með yfirborðshleðslu ρ_s

Þáttur $\bar{E}$ samhliða yfirb. við málmyfirborð (leiðara)

$\bar{E}_t = 0$



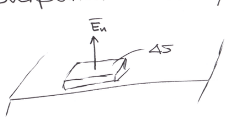
$\oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0$

$= E_t \Delta w$ þ. $\Delta h \to 0$

$\to \bar{E}_t = 0$

(2)

Þverþáttur $\bar{E}$ við yfirborð leiðara



$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \bar{E}_n \cdot \Delta S = \frac{\rho_s \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$\to E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

Innan leiðara $\bar{E} = 0$, $\rho = 0$ í jafnvægi

Jaðarskilyrði við yfirborð

$\bar{E}_t = 0$

$E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$

Rafsviðið er alls staðar hornrétt á yfirborð leiðara

yfirborðið er jafnspennuflötur

(3)

Rafsvarar í rafstöðufræði

Til eru mism. framsetn. Við fylgjum bók hér.

Stórsær $\leftrightarrow$ Smásær skali

* Frjálsar hleðslur (hreyfanlegar rafeindir.... leiðni rafeindir)

* Bundnar hleðslur (þéttbundnar rafeindir hægt að hnika til)

↳ Skautun

ytra rafsvið getur hnikað til rafeindum í atómum, sameindum .....

Sumar sameindir eru skautaðar, ytra svið raðar skautunum upp.

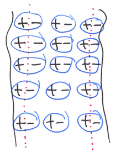
Sum efni halda skautunar uppröðun án ytra sviðs (undir vissu hitastigi)

↑

(e. electret)

4

Rafsvari



hvert lítið rúmfrymi dv' gefur tvískauts-mætti í p. $\bar{r}$

$$dV = \frac{\bar{P}\cdot\hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}\,dv' \;,\quad \bar{P} = \bar{P}(\bar{r}')$$

Heildarrafstöðumættið er því

$$V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} dv'\,\frac{\bar{P}\cdot\hat{a}_R}{R^2} \;,\quad R = |\bar{r}-\bar{r}'|$$

Skautun leiðir til yfirborðshleðslu (fastrar)

Þessa jöfnu má umskrifa sem

$$V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{S'} \underbrace{\frac{\bar{P}\cdot\hat{a}_n}{R}}_{\text{yfirborðsliður}}\,ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \underbrace{\frac{(-\bar{\nabla}'\cdot\bar{P})}{R}}_{\text{bol liður}}\,dv'$$

5

Form heildanna bendir á túlkun

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{P}\cdot\hat{a}_n &= \rho_{ps} \\ -\bar{\nabla}\cdot\bar{P} &= \rho_p \end{aligned}}$$

yfirborðshleðsla vegna skautunar

bolhleðsla v. skautunar

Skautaða rafsvarann má skipta út fyrir ρ_{ps} og ρ_p (hleðsluþéttleika)

Rafsviði í kerfi með rafsvara má því reikna frá

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\overbrace{(\rho + \rho_p)}^{\text{heildar stórsæja hleðslan}}$$

ρ er því stórsæja frjálsa (hreyfanlega) hleðslan

(Hér eru til önnur byrjunarsjónarmið, hleðslur utan agnanna)

6

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho + \rho_p) = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho - \bar{\nabla}\cdot\bar{P})$$

$$\rightarrow \quad \bar{\nabla}\cdot(\epsilon_0\bar{E} + \bar{P}) = \rho$$

Skilgreinum færslusviðið $\bar{D}$ þ.a.

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho$$

þægilegra form þ.s. okkur finnst sem við stjórnum frjálsu hleðslunum

Við þekkjum ρ í upphafi, en ekki ρ_p

með

$$\bar{D} = \epsilon_0\bar{E} + \bar{P}$$

→ því verður þetta á heildisformi

$$\oint \bar{D}\cdot d\bar{a} = Q$$

Varúð, ekki er til Coulombs lögmál fyrir D, ekki er víst að $\bar{\nabla}\times\bar{D} = 0$. T.D. er $\bar{\nabla}\times\bar{P} \neq 0$ í einf. stangar "electret". Ekkert mætti er til fyrir $\bar{D}$!

7

Í flestum efnum er $\bar{P}(\bar{E})$

Í efni með línulega og einsleita svörun gildir

$$\bar{P} = \epsilon_0\chi_e\bar{E}$$

þar sem χ_e er rafviðtak

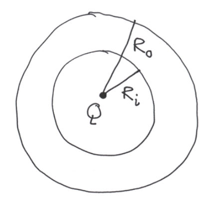
$$\bar{D} = \epsilon_0\bar{E} + \bar{P} = \epsilon_0(1+\chi_e)\bar{E}$$

$$= \epsilon_0\epsilon_r\bar{E} = \epsilon\bar{E}$$

Almennt er ϵ í raun tensor háður tíðni og bylgjulengd (Reiknanlegt frá efniseiginleikum með eðlisfræði þéttefnis)

Dæmi

Jákvæð punkt hleðsla Q í miðju rafsvarakúluskeljar með geisla $R_i < R_o$



finna $\bar{E}$, V, $\bar{D}$ og $\bar{P}$

(8)

$R > R_o$

Rafsvarinn er óhlaðinn
Gausslögmál

$$E_{R1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R^2}$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R}$$

$$\bar{P} = 0 \rightarrow D_{R1} = \epsilon_o E_{R1}$$

$R_i < R < R_o$

Gauss

$$E_{R2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}$$

$$\rightarrow D_{R2} = \epsilon E_{R2} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\bar{P} = \bar{D} - \epsilon_o \bar{E}$$

$$\rightarrow P_{R2} = \frac{Q}{4\pi R^2}\left(1 - \frac{\epsilon_o}{\epsilon}\right) = \frac{Q}{4\pi R^2}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$$

því $\epsilon = \epsilon_o \epsilon_r$

$$V_2 = -\int_{\infty}^{R_o} E_{R1}\,dR - \int_{R_o}^{R} E_{R2}\,dR$$

$$= V_1(R_o) - \frac{Q}{4\pi\epsilon}\int_{R_o}^{R}\frac{dR}{R^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\left\{\frac{1}{R_o} + \frac{1}{\epsilon_r R} - \frac{1}{\epsilon_r R_o}\right\}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\left\{\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{1}{R_o} + \frac{1}{\epsilon_r R}\right\}$$

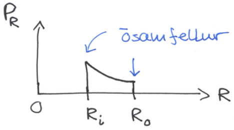
(9)

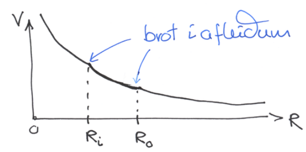
$R < R_i$

$$E_{R3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R^2}$$

$$D_{R3} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

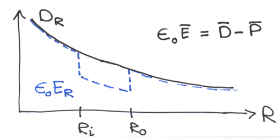
$$P_{R3} = 0$$





$$V_3 = V_2(R_i) - \int_{R_i}^{R} E_{R3}\,dR$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\left\{\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{1}{R_o} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R}\right\}$$



$$\epsilon_o \bar{E} = \bar{D} - \bar{P}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\rho_{ps}(R_i) = \bar{P}\cdot(-\hat{a}_R)\Big|_{R=R_i} = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R_i^2} \\ \rho_{ps}(R_o) = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R_o^2}, \quad \rho_p = 0\end{gathered}}$$

(10)

Styrkur rafsvara
sjá töflu 3-1

Jaðarskilyrði á mörkum tveggja rafsvara

$$\boxed{\bar{E}_{1t} = \bar{E}_{2t}} \qquad \left(\frac{\bar{D}_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{\bar{D}_{2t}}{\epsilon_2}\right)$$

$$\boxed{\hat{a}_{n2}\cdot(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s}$$ hleðsluþéttleiki yfirborðs

einingarvigur út úr efni 2

(11)

Rýmd í fjölleiðarakerfi

N leiðarar með Q_i og V_i

$$V_1 = p_{11}Q_1 + \cdots p_{1N}Q_N$$
$$\vdots$$
$$V_N = p_{N1}Q_1 + \cdots p_{NN}Q_N$$

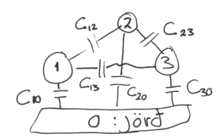
mættisstuðlar

hægt að snúa við

$$Q_1 = C_{11}V_1 + \cdots C_{1N}V_N$$
$$\vdots$$
$$Q_N = C_{N1}V_1 + \cdots C_{NN}V_N$$

C_{ii} : rýmdar stuðlar

C_{ji} $(i \neq j)$: span stuðlar



$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3$$

$$Q_2 = C_{12}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3$$

$$Q_3 = C_{13}V_1 + C_{23}V_2 + C_{33}V_3$$

eða með „hlut rýmd $\mathbb{C}_i$"

$$Q_1 = \mathbb{C}_{10}V_1 + \mathbb{C}_{12}(V_1 - V_2) + \mathbb{C}_{13}(V_1 - V_3)$$

$$Q_2 = \mathbb{C}_{20}V_2 + \mathbb{C}_{12}(V_2 - V_1) + \mathbb{C}_{23}(V_2 - V_3)$$

$$Q_2 = \mathbb{C}_{30}V_3 + \mathbb{C}_{13}(V_3 - V_1) + \mathbb{C}_{23}(V_3 - V_2)$$

(12)

Sem má endurraða

$$Q_1 = (\mathbb{C}_{10}+\mathbb{C}_{12}+\mathbb{C}_{13})V_1 - \mathbb{C}_{12}V_2 - \mathbb{C}_{13}V_3$$

$$Q_2 = -\mathbb{C}_{12}V_1 + (\mathbb{C}_{20}+\mathbb{C}_{12}+\mathbb{C}_{23})V_2 - \mathbb{C}_{23}V_3$$

$$Q_3 = -\mathbb{C}_{13}V_1 - \mathbb{C}_{23}V_2 + (\mathbb{C}_{30}+\mathbb{C}_{13}+\mathbb{C}_{23})V_3$$

$$\Downarrow$$

$$C_{11} = \mathbb{C}_{10} + \mathbb{C}_{12} + \mathbb{C}_{13}$$

$$C_{22} = \mathbb{C}_{20} + \mathbb{C}_{12} + \mathbb{C}_{23}$$

$$C_{33} = \mathbb{C}_{30} + \mathbb{C}_{13} + \mathbb{C}_{23}$$

$$C_{12} = -\mathbb{C}_{12}$$

$$C_{23} = -\mathbb{C}_{23}$$

$$C_{13} = -\mathbb{C}_{13}$$

→ snúa við

afstæð hlutrýmd

$$\mathbb{C}_{10} = C_{11} + C_{12} + C_{13}$$

$$\mathbb{C}_{20} = C_{22} + C_{12} + C_{23}$$

$$\mathbb{C}_{30} = C_{33} + C_{13} + C_{23}$$

Rýmd leiðara til jarðar

rýmd leiðara i til allra hinna tengdra við jörð

(13)

Orka í hleðslu uppröðun

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k V_k}$$

Jöfn vinnunni sem þarf til að raða hleðslum saman frá „∞“

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} dv'\, \rho V}$$

← sjálforka innifalin

táknað við svið

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} dv'\, \overline{D}\cdot\overline{E}}$$

(1)

Lausn rafstöðuverkefna

Grunnjöfnur rafstöðufræðinnar í stórsæu efni eru

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\nabla}\cdot\overline{D} &= \rho \quad (1) \\ \overline{\nabla}\times\overline{E} &= 0 \quad (2) \end{aligned}}$$

með jaðarskilyrðum sem við höfum rætt

Vegna (2) er hægt að finna mætti

$$\overline{E} = -\overline{\nabla}V \qquad (3)$$

Ef hægt er að skrifa

$$\overline{D} = \epsilon\overline{E} \qquad (4)$$

(ϵ má vera fall af staðarhnitum)

má setja saman (1) og (4)+(3) þ.a.

$$\overline{\nabla}\cdot(\epsilon\overline{\nabla}V) = -\rho$$

Í efni þar sem ϵ er fasti fæst

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}} \qquad (5)$$

Jafna Poissons með Laplace virkjanum ∇^2

(2)

Í kerfi með engum frjálsum hleðslum lýsir jafna Laplace

$$\boxed{\nabla^2 V = 0} \qquad (6)$$

rafstöðumættinu V.

(5) og (6) eru hlutafleiðujöfnur fyrir „skalar“ rafstöðumættið

Þegar V er fundið er einfalt að reikna rafsviðið

$$\overline{E} = -\overline{\nabla}V$$

Til eru margar aðferðir til að leysa jöfnur Poissons og Laplace

Greiningaraðferðir	tölulegar

Green föll → heildisjöfnur með innbyggðum jaðarskilyrðum

fallagrunnar → eiginföll virkja Fourier, Laplace gr. ......

Net + endanleg bútun

spegilmyndir

$\boxed{\text{Við skoðum aðeins nokkrar einfaldar aðferðir}}$

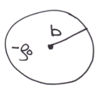
3

> Lesa 4-3 í bók um einkvæmni lausna þessarra jafna !

Dæmi

Reikna $\bar{E}$ utan og innan hlaðinnar kúlu með geisla b og fastan hleðsluþéttleika

$$\rho = \begin{cases} -\rho_0 & R \leq b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



Innan kúlu þarf að leysa jöfnu Poissons og jöfnu Laplace utan hennar

Í kúluhnitum er virki Laplace

$$\nabla^2 = \boxed{\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right)} + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Hleðslan hér er kúlusamhverf $\rightarrow$ rafstöðumættið getur ekki verið háð hornunum $\Omega = (\theta, \phi)$ því skiptir aðeins fyrsti liðurinn máli hér

4

Innan kúlu $\quad R \leq b, \ \rho = -\rho_0$

$$\nabla^2 V_i = + \frac{\rho_0}{\epsilon}$$

eða

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV_i}{dR}\right) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV_i}{dR}\right) = R^2 \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

heildum óákveðið

$$R^2 \frac{dV_i}{dR} = \frac{1}{3} R^3 \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + C_1$$

eða

$$\frac{dV_i}{dR} = \frac{1}{3} R \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + \frac{C_1}{R^2}$$

Rafsviðið $\bar{E}_i = -\bar{\nabla} V_i$

$$\rightarrow \bar{E}_i = -\hat{a}_R \frac{dV_i}{dR}$$

Hleðslan er jafndreifð innan kúlu (engin punkthleðsla í miðju) $\rightarrow$ $\bar{E}_i$ getur ekki haft sérstöðupunkt í $R=0$

$$\rightarrow C_1 = 0$$

því höfum við

$$\boxed{\bar{E}_i = -\hat{a}_R \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R \qquad R \leq b}$$

Ein heildun í viðbót gefur

$$V_i = \frac{1}{6} R^2 \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + C_1'$$

5

Utan kúlu $\quad R > b$

$$\nabla^2 V_o = 0$$

eða

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV_o}{dR}\right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV_o}{dR}\right) = 0$$

Heildun gefur

$$R^2 \frac{dV_o}{dR} = C_2$$

eða

$$\frac{dV_o}{dR} = \frac{C_2}{R^2}$$

$$\bar{E}_o = -\bar{\nabla} V_o = -\hat{a}_R \frac{dV_o}{dR} = -\hat{a}_R \frac{C_2}{R^2}$$

með óþekktum fasta C_2!

Hér er engin yfirborðshleðsla svo rafsviðið er samfellt í $R=b$

$$|\bar{E}_i(b)| = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} b = \frac{C_2}{b^2} = |\bar{E}_o(b)|$$

$$\rightarrow \quad C_2 = \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0}$$

eða

$$\bar{E}_o(R) = -\hat{a}_R \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R^2}, \quad R \geq b$$

$$= +\hat{a}_R \frac{\left(-\frac{4\pi}{3} b^3 \rho_0\right)}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

6

Fyrir mættið fæst

$$V_o = -\frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R} + C_2'$$

$C_2' = 0$ því $\lim_{R \to \infty} V_o(R) = 0$

Áður fengum við

$$V_i = \frac{1}{6} R^2 \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + C_1'$$

Rafstöðumættið er samfellt í $R = b$

$$V_i(b) = \frac{\rho_0 b^2}{6\epsilon_0} + C_1' = -\frac{\rho_0 b^2}{3\epsilon_0} = V_o(b)$$

$$\rightarrow C_1' = -\frac{\rho_0 b^2}{2\epsilon_0}$$

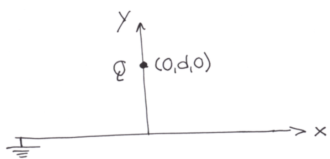
og þess vegna að lokum

$$V_i = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left(\frac{3b^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right)$$

Aðferð spegilhleðslna

(7)

Athugum punkthleðslu Q yfir leiðandi plötu með 0-spennu



punkthleðslan leiðir til yfirborðshleðslu á leiðaranum ρ_s

$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+(y-d)^2+z^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho_s}{R_1}\,ds$$

En ρ_s er óþekkt!

Við vitum

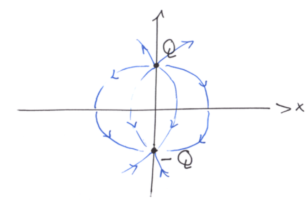
* $V(x,0,z) = 0$ (á leiðaranum)
* Nærri punkthleðslunni gildir $V \to \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ þ. $R \to 0$
* Fjarri Q þ. $x \to \pm\infty$, $y \to +\infty$, $z \to \pm\infty$ verður $V \to 0$

(8)

* Samhverfur
  $V(x,y,z) = V(-x,y,z)$
  $V(x,y,z) = V(x,y,-z)$
* Við leiðarann verður $\bar{E}$ að vera hornrétt á hann

Lausn

Kippa leiðaraplötu í burtu og bæta við spegilhleðslu



Fyrir $y>0$

$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$$

með

$$R_+ = \left[x^2 + (y-d)^2 + z^2\right]^{1/2}$$

$$R_- = \left[x^2 + (y+d)^2 + z^2\right]^{1/2}$$

(9)

Hægt er að sýna að $V(x,y,z)$ uppfyllir jöfnu Laplace og öll skilyrðin sem við nefndum

\+ Einkvæmni lausna

↓

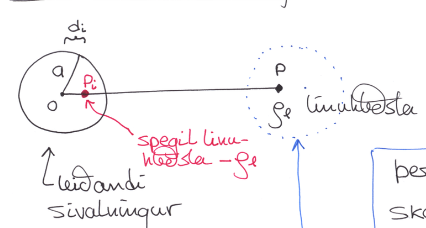
Við höfum rétta lausn

* spegilhleðslan er utan þess svæðis sem við viljum leysa jöfnuna á
* Nú er einfalt að reikna $\bar{E}$ og ρ_s
* Lausnin gildir aðeins fyrir $y>0$

{ yfirborðshleðslan krefst stökks (ósamfellu) í $\bar{E}$ í yfirborðinu, Við höfum ekki reynt að ná því → aðeins lausn f. $y>0$ }

Línuhleðsla + Sívalningur

(10)



Í bók er sýnt að um spegilhleðsluna verður að gilda

$$\boxed{\rho_i = -\rho_l, \quad d_i = \frac{a^2}{d}}$$

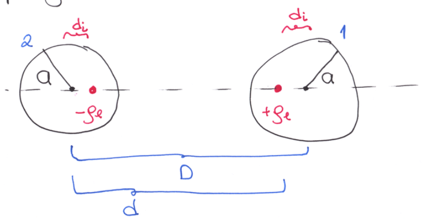
þessi spegil línuhleðsla skapar jafnspennuflöt þar sem sívalningurinn var

\+

Einnig verður til jafnspennuflötur um ρ_l með miðju hliðraða um d_i frá ρ_l hjá fyrri sívalningi

11

Því getum við skoðað tvær línur



$$V_2 = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{d}\right)$$

$$V_1 = -\frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{d}\right)$$

Leitt út á bls. 163–4

Í stað jafnspennuflata leiðaranna koma spegilhleðslurnar $\pm\rho_\ell$ í fjarlægð $(D-2d_i) = (d-d_i)$ frá hvor annarri

12

$a<d \;\rightarrow\; \ln\left(\frac{a}{d}\right) < 0$

og rýmd á lengdareiningu

$$C = \frac{\rho_\ell}{V_1 - V_2} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}$$

Nú gildir $d = D - d_i = D - \frac{a^2}{d}$

$$\rightarrow d = \frac{1}{2}\left(D + \sqrt{D^2 - 4a^2}\right)$$

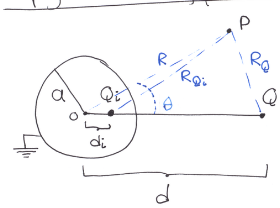
sleppum − lausninni því $D, d \gg a$

$$\boxed{C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left\{\frac{D}{2a} + \sqrt{\left(\frac{D}{2a}\right)^2 - 1}\right\}}} \quad \text{eða} \quad \boxed{C = \frac{\pi\epsilon_0}{\operatorname{Arccosh}\left(\frac{D}{2a}\right)}}$$

p.s. $\operatorname{Arccosh}(x) = \ln\left\{x + \sqrt{x^2-1}\right\}$

1

Spegilhleðslur fyrir kúluyfirborð



Hér gildir $\boxed{Q_i = -\frac{a}{d}Q, \quad d_i = \frac{a^2}{d}}$

spegilhleðslan er ekki sömu stærðar og upprunalega hleðslan

Dæmi: Reikna yfirborðshleðsluþéttleikann og heildar yfirborðshleðsluna

$$V(R,\theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_Q} - \frac{a}{d\cdot R_{Q_i}}\right)$$

$$R_Q = \left[R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta\right]^{1/2}, \quad R_{Q_i} = \left[R^2 + \left(\frac{a^2}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{a^2}{d}\right)\cos\theta\right]^{1/2}$$

2

Jaðarskilyrði fyrir E_n við leiðara

er $E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$

Fyrir kúluflötinn hér gildir

$$E_R(R,\theta)\Big|_{R=a} = E_n$$

Athugið að θ er mælt frá línunni OQ. Best er að hugsa OQ sem z-ásinn hér. θ er þá venjulega azimuthal hornið í kúluhnitum.

$$\rightarrow \rho_s = \epsilon_0 E_R(a,\theta) = -\epsilon_0 \frac{\partial V(R,\theta)}{\partial R}\Big|_{R=a}$$

$$= -\frac{Q(d^2-a^2)}{4\pi a\left(a^2+d^2-2ad\cos\theta\right)^{3/2}}$$

$\rho_s < 0$ með max gildi fyrir $|\rho_s|$ í $\theta = 0$ og min gildi í $\theta = \pi$ (hinumegin á kúlunni)

3

$$\text{Heildarhleðsla} = \oint_{\text{Kúluyfirborð}} \rho_s \, ds = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, \rho_s(\theta,\varphi)$$

$$= -2\pi a^2 \int_0^{\pi} \frac{Q(d^2-a^2)\sin\theta \, d\theta}{4\pi a(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} = -\frac{2\pi a Q(d^2-a^2)}{4\pi} \int_{-1}^{1} \frac{du}{(a^2+d^2-2adu)^{3/2}}$$

$$= -\frac{a}{d} Q = Q_i$$

Yfirborðshleðslan er jöfn spegilhleðslunni

4

Lausn Laplace jöfnu

Kerfi með engum hleðslum → engar spegilhleðslur mögulegar

Við skoðum „aðgreiningu breytistærða" sem er möguleg þegar „spennufletir" falla að flötum þekkts einfalds hnitakerfis

Í Morse og Feshbach (1953) eru kynnt 9 hnitakerfi sem jafna Laplace er aðgreind í

Við skoðum 3, Kartísk-, Sívalnings- og Kúluhnit

Aðgreining breytistærða er ekki alltaf möguleg, og þá eru enn til margar aðferðir

5

Hlutafleiðujafna + jaðarskilyrði

1. Dirichlet verkefni

   Mættið er gefið á jaðrinum

2. Neumann verkefni

   Normal afleiða mættisins er gefin á jaðrinum

3. Blandað verkefni

   Mættið er gefið á hluta jaðrins og normal afleiða þess á afganginum

6

Kartísk hnit

Jafna Laplace er

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) V(x,y,z) = 0$$

Gerum ráð fyrir að lausnin uppfylli

$$V(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

Hver liður er aðeins fall af einni breytu

Innsetning gefur

$$Y(y)Z(z)\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)Z(z)\frac{d^2Y(y)}{dy} + X(x)Y(y)\frac{d^2Z(z)}{dz} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz} = 0$$

7

Því hlýtur að gilda

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -k_x^2 \qquad \text{o.s.fr. fyrir } y \text{ og } z$$

k_i – ákvarðast af jaðarskilyrðum og jafna Laplace krefst

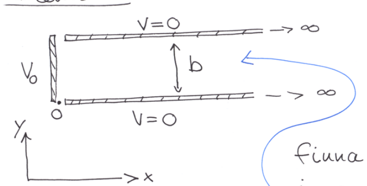
$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

Lausn $X''(x) + k_x^2 X(x) = 0$

k_x^2	k_x	$X(x)$	eða
0	0	$A_0x + B_0$	
+	k	$A_1\sin(kx) + B_1\cos(kx)$,	$C_1e^{ikx} + D_1e^{-ikx}$
−	ik	$A_2\sinh(kx) + B_2\cosh(kx)$,	$C_2e^{kx} + D_2e^{-kx}$

8

Dæmi



tvær samhliða plötur (óendanleg hálfplön) leiðandi $V=0$

finna $V(x,y,z)$ alls staðar innan

Ekkert háð z á jaðrinum $\rightarrow V = V(x,y)$

Jaðarskilyrði

$0 \leq y \leq b$ $\boxed{V(0,y) = V_0 \quad V(\infty, y) = 0}$

$\boxed{V(x,0) = 0 \quad V(x,b) = 0}$ $0 \leq x \leq \infty$

9

$V = V(x,y) \rightarrow k_z = 0$ og $Z(z) = B_0$

$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \rightarrow k_y^2 = -k_x^2 = k^2$, $k \in \mathbb{R}$

Í þessu vali er k_x þvertala, setjum $k_x = ik$

$\rightarrow X(x) = D_2 e^{-kx}$, vaxandi lausnin er ekki möguleg þ. $x \rightarrow \infty$

Þá er eftir

$$Y(y) = A_1 \sin(ky)$$

Lausn væri því

$$V(x,y) = \underbrace{B_0 D_2 A_1}_{= C_n} e^{-kx} \sin ky$$

10

En við verðum líka að uppfylla

$$V(x,b) = 0 \leftrightarrow C_n e^{-kx} \sin(kb) = 0$$

sem er aðeins mögulegt ef

$$\sin(kb) = 0 \rightarrow kb = n\pi \text{ eða } k = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1,2,3\ldots$$

Lausnin er því

$$V_n(x,y) = C_n e^{-k_n x} \sin(k_n y), \quad k_n = \frac{n\pi}{b}$$

Þessi lausn uppfyllir jöfnu Laplace, en ekki jaðarskilyrðið $V(0,y) = V_0$ fyrir $0 < y < b$

(11)

Jafna Laplace er línuleg hlutafleiðujafna

—> summa $V_n(x,y)$ fyrir mism. n er líka lausn

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n x} \sin(k_n y)$$

og síðasta jaðarskilyrðið er uppfyllt ef

$$V(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin k_n y = V_0 \,, \quad 0<y<b$$

Ákvarða þarf stuðlana C_n svo þetta skilyrði verði uppfyllt. Þetta er í raun fourier röð.

Notum að föllin $\sin(k_m y)$ skilgreina fullkomin grunn á þessu bili

(12)

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n y) = V_0$$

$$\longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^b C_n \sin(k_n y)\sin(k_m y)\,dy = \int_0^b V_0 \sin(k_m y)\,dy$$

$$\longrightarrow \quad \left.\begin{array}{ll} \frac{C_n}{2} b & \text{ef } m=n \\ 0 & \text{ef } m \neq n \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} \frac{2bV_0}{m\pi} & \text{ef } m=1,3,5,\ldots \\ 0 & \text{ef } m=0,2,4,\ldots \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \quad C_n = \left\{\begin{array}{ll} \frac{4V_0}{n\pi} & \text{ef } n=1,3,5,\ldots \\ 0 & \text{ef } n=0,2,4,\ldots \end{array}\right.$$

(13)

Því fæst að lokum

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n} e^{-k_n x} \sin(k_n y) \qquad \begin{array}{l} x>0 \\ 0<y<b \end{array}$$

Röðin er vel samleitin og því einfalt að teikna 2D-graf af lausninni

(1)

Jafna Laplace í sívalningshnitum (r,ϕ,z)

$$\nabla^2 V = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Í bókinni er aðeins fjallað um sívalnings verkefni sem eru meir á lengdina en breiddina

$$\longrightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Gerum ráð fyrir að hægt sé að aðgreina breytistærðir þ.a.

$$V(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$$

Innsetning gefur

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{dR(r)}{dr}\right\} + \frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0$$

(2)

því verður að gilda

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{dR(r)}{dr}\right\} = k^2 \quad \text{og} \quad \frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = -k^2$$

Fyrir hornið ϕ ~~fæst~~ því

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + k^2\Phi(\phi) = 0$$

$\Phi(\phi)$ verður að vera lotubundin, $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi n)$

k verður að vera heiltala

$$\rightarrow \Phi(\phi) = A_\phi \sin(n\phi) + B_\phi \cos(n\phi)$$

Jafna útþáttar er þá

$$r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2} + r\frac{dR(r)}{dr} - n^2R(r) = 0$$

(3)

Lausn þessarar jöfnu er

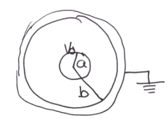
$$R(r) = A_r r^n + B_r r^{-n}$$

Heildarlausnin (á svæði með $0 \le \phi \le 2\pi$) er því

$$V_n(r,\phi) = r^n\left\{A_n \sin(n\phi) + B_n \cos(n\phi)\right\} + r^{-n}\left\{A_n' \sin(n\phi) + B_n' \cos(n\phi)\right\}$$

Dæmi

samása kapall



Jaðarskilyrði

$V(b) = 0$

$V(a) = V_0$

Ekkert í uppsetningunni brýtur hornsamhverfu

$\rightarrow n = 0$

(4)

Þegar $n=0$ er jafna útþáttar

$$\frac{d}{dr}\left\{r\frac{dR(r)}{dr}\right\} = 0$$

sem leiðir til

$$R(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Jaðargildin leiða til

$$\left.\begin{aligned} C_1 \ln b + C_2 &= V(b) = 0 \\ C_1 \ln a + C_2 &= V(a) = V_0 \end{aligned}\right\} \quad C_1 = -\frac{V_0}{\ln(b/a)}, \quad C_2 = \frac{V_0 \ln b}{\ln(b/a)}$$

$$\rightarrow \boxed{V(r) = \frac{V_0}{\ln(b/a)}\ln\left(\frac{b}{r}\right)}$$

(5)

Jafna Laplace í kúluhnitum

Í bókinni er einungis fjallað um verkefni í kúluhnitum sem hafa ϕ samhverfu, jafnan er þá

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = 0$$

og lausnin er aðgreind í tvo þætti

$$V(R,\theta) = \Gamma(R)\Theta(\theta)$$

Innsetning gefur

$$\underbrace{\frac{1}{\Gamma(R)}\frac{d}{dR}\left\{R^2\frac{d\Gamma(R)}{dR}\right\}}_{R\text{-hluti}} + \underbrace{\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right\}}_{\theta\text{-hluti}} = 0$$

6

R-hlutinn og θ-hlutinn verða að vera óháðir

$$\frac{1}{\Gamma(R)}\frac{d}{dR}\left\{R^2\frac{d\Gamma(R)}{dR}\right\} = k^2$$

því saman l. verður að koma út 0

og

$$\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right\} = -k^2$$

Útþátturinn umformast í

$$R^2\frac{d^2\Gamma(R)}{dR^2} + 2R\frac{d\Gamma(R)}{dR} - k^2\Gamma(R) = 0$$

með lausn

$$\Gamma_n(R) = A_nR^n + BR^{-(n+1)}$$

og $n(n+1) = k^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$

7

θ-hlutinn verður þá

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right\} + n(n+1)\Theta(\theta)\sin\theta = 0$$

Sem er þekkt sem afleiðujafna Legendre og hefur lausn

$$\Theta_n(\theta) = P_n(\cos\theta)$$

P_n er Heiltölu Legendre. (Til eru einnig föll Legendre....)
P_n hefur enga sérstöðu. í $\theta = 0, \pi$ eins og hin lausnin $Q_n(\cos\theta)$

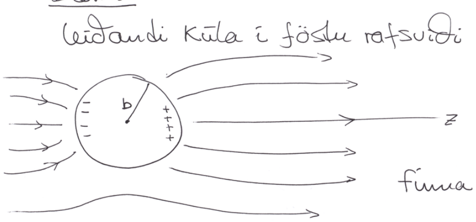
Samantekin er lausnin því

$$V_n(R,\theta) = \left\{A_nR^n + BR^{-(n+1)}\right\}P_n(\cos\theta)$$

8

<u>Dæmi</u>

Leiðandi kúla í föstu rafsviði



Við búumst við að á kúlunni skautist yfirborðshleðsla

Finna $V(R,\theta)$ og $\bar{E}(R,\theta)$

Í upphafi er rafsviðið $\bar{E}_0 = \hat{a}_zE_0$ áður en kúlunni er komið fyrir.

<u>Jaðarskilyrði</u>

$$\boxed{\begin{aligned} &V(b,\theta) = 0 && (1)\\ &V(R,\theta) = -E_0z = -E_0R\cos\theta && (2)\\ &\text{þ. } R \gg b \end{aligned}}$$

9

Almenna lausnin er

$$V(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_nR^n + B_nR^{-(n+1)}\right\}P_n(\cos\theta), \quad R \geq b$$

Jaðarskilyrði (2) gefur $A_n = 0$ ef $n \neq 1$, $A_1 = -E_0$
vitum $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$$\rightarrow V(R,\theta) = -E_0R\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty}B_nR^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$$

fyrsti liðurinn í summunni $n=0$ á einungis við hlaðna kúlu $\rightarrow B_0 = 0$

$$V(R,\theta) = \left(\frac{B_1}{R^2} - E_0R\right)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}B_nR^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$$

10

Reynum jaðarskilyrði 1, $V(b,\theta)=0$

$$\rightarrow \left(\frac{B_1}{b^2} - E_0 b\right)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n b^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) = 0$$

sem verður aðeins uppfyllt með

$$B_1 = E_0 b^3 \quad \text{og} \quad B_n = 0 \ \text{f.} \ n \geq 2$$

$$\rightarrow \boxed{V(R,\theta) = -E_0\left\{1 - \left(\frac{b}{R}\right)^3\right\} R\cos\theta\,,} \qquad R \geq b$$

ytrasviðið

tvískautsþáttur

11

Ratsviðið

$$\bar{E}(R,\theta) = -\hat{a}_R \frac{\partial V}{\partial R} - \hat{a}_\theta \frac{\partial}{R\partial\theta} V$$

$$= +\hat{a}_R \left\{E_0\left[1 + 2\left(\frac{b}{R}\right)^3\right]\cos\theta\right\}$$

$$- \hat{a}_\theta \left\{E_0\left[1 - \left(\frac{b}{R}\right)^3\right]\sin\theta\right\} \qquad R \geq b$$

og hleðsluþéttleikinn

$$\rho_s(\theta) = \epsilon_0 E_R(b,\theta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta$$

tvípólsdreifing

12

Ef ekki er gert ráð fyrir ϕ-samhverfu í kúluhnitum verður hornþáttur lausnar kúluföll

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}$$

þ.s.

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

og

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, Y^*_{l'm'}(\theta,\phi)\, Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Kúluföllin eru hornrétt. Og liðunin

$$r_< = \begin{cases} r' & \text{ef } r' < r \\ r & r < r' \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1}\left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\right) Y^*_{lm}(\theta',\phi')\, Y_{lm}(\theta,\phi)}$$

er notuð til að ráða við heildun með $\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$

13

Í sívalningshnitum er til skyld liðun

$$\boxed{\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk\, e^{im(\phi-\phi')} J_m(kr) J_m(kr')\, e^{-k(z_> - z_<)}}$$

í Besselföllum og einfaldari

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_0(kr)\, dk$$

$\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$ er Greenfallið fyrir Poisson jöfnuna í óendanlegu einsleitu rúmi og heildi eins og

$$V(\bar{x}) = \int d\bar{x}' \frac{\rho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$$

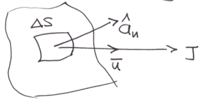
eru leyst oft með þessum liðunum

1

Sístæðir straumar

Straumþéttleiki og lögmál Ohms

Athugum straum hleðslubera í gegnum yfirborð



á tímanum Δt fer um ΔS

$$\Delta Q = \rho\, \bar{u}\cdot \underbrace{\hat{a}_n\, \Delta S}_{=\overline{\Delta S}}\, \Delta t$$

$$\rightarrow \quad \Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho\, \bar{u}\cdot\overline{\Delta S}$$

er straumurinn um ΔS

ρ: hleðsluþéttleiki

Straumþéttleikinn er þá skilgreindur með

$$\Delta I = \bar{J}\cdot\overline{\Delta S}$$

Heildarstraumurinn er heildi hans yfir S

$$I = \int_S \bar{J}\cdot d\bar{S}$$

og

$$\bar{J} = \rho\bar{u}$$

2

Á okkar stórsæja skala er $\bar{u}$ rekhraði hleðslubera

Í mörgum efnum gildir

$$\bar{u} = -\mu_e \bar{E}$$

þ.s. μ_e er hreyfanleiki rafeinda, og einnig

$$\bar{J} = \sigma\bar{E}$$

þ.s. $\sigma = -\rho_e\mu_e$

Þau efni eru kölluð ómsk (í þeim tengjast J og $\bar{E}$ línulega)

σ (conductivity) er eðlisleiðni efnis

Viðnám efnisbúts með lengd l og fastan þverskurð S er

$$\boxed{R = \frac{l}{\sigma S}}$$

Leiðni (conductance) efnisbúts er

$$G = \frac{1}{R} = \sigma\frac{S}{l}$$

$$\boxed{R_{sr} = R_1 + R_2\,, \quad \frac{1}{R_{\parallel}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad G_{\parallel} = G_1 + G_2}$$

3

Lesa sjálf um íspennu og Lögmál Kirchhoff's

Straumur um yfirborð S

$$I = \oint_S \bar{J}\cdot d\bar{S} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dv$$

$$\rightarrow \int_V \bar{\nabla}\cdot J\, dv = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dv$$

$$\downarrow$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

eða

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0}$$

Samfelldnijafnan

Hleðsla er varðveitt í hverjum punkti rúmsins

Í einföldum ómskum leiðara gildir

$$\bar{J} = \sigma\bar{E}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho + \sigma\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\sigma}{\epsilon}\rho = 0$$

4

með lausn

$$\rho = \rho_0 e^{-\sigma/\epsilon\, t}$$

fyrir kopar er slökunartíminn

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \sim 1\cdot 10^{-19}\,s$$

Hleðsluberi með fastan rekhraða $\bar{u}$ í rafsviði $\bar{E}$

Vinnan framkvæmd af $\bar{E}$

$$\Delta W = q\bar{E}\cdot(\Delta\bar{l})$$

$$\rightarrow \quad P = \frac{\Delta W}{\Delta t}\bigg|_{\Delta t\to 0} = q\bar{E}\cdot\bar{u}$$

er aflið tekið frá $\bar{E}$

fyrir hleðsluþéttleika fæst

$$dP = \bar{E}\cdot\rho\bar{u}\, dv$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{P = \int_V \bar{E}\cdot\bar{J}\, dv}$$

Joules reglan fyrir sístæðan straum

5

Fyrir sístæðan straum gildir

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{J}=0 \quad \dashrightarrow \quad \oint_S \bar{J}\cdot d\bar{s}=0$$

Í óhmsku efni má setja saman

Heildisform

$$\bar{J}=\sigma\bar{E} \quad \text{og} \quad \bar{\nabla}\times\bar{E}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{\nabla}\times\left(\frac{\bar{J}}{\sigma}\right)=0 \quad \dashrightarrow \quad \oint_C \frac{1}{\sigma}\bar{J}\cdot d\bar{l}=0$$

Samanburður við $\bar{E}$ og $\bar{D}$ við jaðar gefur

$$\boxed{J_{1n}=J_{2n}} \quad \text{og} \quad \boxed{\frac{J_{1t}}{J_{2t}}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$$

6

Einsleitur leiðari

Um sístæðan straum í einsleitum leiðara gildir

$$\bar{\nabla}\times\bar{J}=0$$

Því er til mættisfall ϕ þ.a.

$$\bar{J}=-\bar{\nabla}\phi$$

og

$$\nabla^2\phi=0$$

Skilflötur tveggja leiðandi rafsvara (lekastraumur)

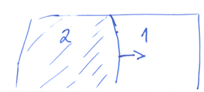
$$J_{1n}=J_{2n} \rightarrow \sigma_1 E_{1n}=\sigma_2 E_{2n}$$

$$D_{1n}-D_{2n}=\rho_s \rightarrow \epsilon_1 E_{1n}-\epsilon_2 E_{2n}=\rho_s$$

Því verður að vera hleðsla á skilfletinum

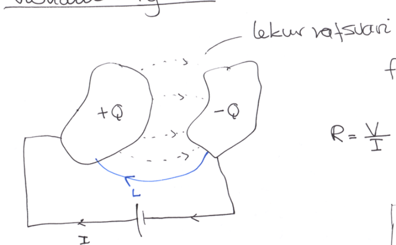
$$\rho_s=\left(\epsilon_1\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-\epsilon_2\right)E_{2n}$$

$$=\left(\epsilon_1-\epsilon_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)E_{1n}$$



7

Viðnám - rýmd



fyrir viðnám gildir

$$R=\frac{V}{I}=\frac{-\int_L \bar{E}\cdot d\bar{l}}{\oint_S \bar{J}\cdot d\bar{s}}=\frac{-\int_L \bar{E}\cdot d\bar{l}}{\oint_S \sigma\bar{E}\cdot d\bar{s}}$$

fyrir rýmd

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{s}}{-\int_L \bar{E}\cdot d\bar{l}}=\frac{\oint_S \epsilon\bar{E}\cdot d\bar{s}}{-\int_L \bar{E}\cdot d\bar{l}}$$

berum saman

$$\boxed{RC=\frac{C}{G}=\frac{\epsilon}{\sigma}}$$

fyrir einsleitt efni

8

Dæmi

samása vír, þar höfðum við áður fundið

$$C=\frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \quad \text{á lengdarein.}$$

Því er lekaviðnámið á einingarlengd

$$R=\frac{\epsilon}{\sigma}\left(\frac{1}{C}\right)=\frac{1}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

9

Aðferð til að reikna viðnám milli jafnspennuflata í efni

1. velja hnitakerfi
2. Gera ráð fyrir V_0 milli skauta
3. Finna $\bar{E}$ í leiðaranum (leysa Laplace ....)
4. finna leiðarstraum

$$I = \int_S \bar{J}\cdot d\bar{s} = \int_S \sigma \bar{E}\cdot d\bar{s}$$

5. Finna R sem

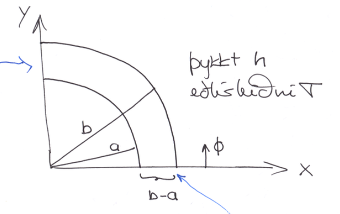
$$R = \frac{V_0}{I}$$

Gildir aðeins fyrir einsleitt efni með ϵ og σ fasta

10

Dæmi

Reikna viðnám fjórðungs-skinnu milli enda



Gerum ráð fyrir $V=0$ á $y=0$ eða $\phi=0$

$V=V_0$ á $x=0$ eða $\phi=\pi/2$

Sívalningshnit (í raun pólhnit)

$$\frac{d^2V}{d\phi^2}=0$$

almenn lausn

$$V = C_1\phi + C_2$$

með jaðarskilyrðum

$$\rightarrow V = \frac{2V_0}{\pi}\phi$$

11

Straumþéttleiki

$$\bar{J} = \sigma\bar{E} = -\sigma\bar{\nabla}V = -\hat{a}_\phi\sigma\frac{\partial V}{r\partial\phi} = -\hat{a}_\phi\frac{2\sigma V_0}{\pi r}$$

finna I, $d\bar{s} = -\hat{a}_\phi h\,dr$

$$I = \int_S \bar{J}\cdot d\bar{s} = \frac{2\sigma V_0}{\pi}h\int_a^b\frac{dr}{r} = \frac{2\sigma h V_0}{\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

og því

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\pi}{2\sigma h\ln(b/a)}$$

D.K. Cheng minnir síðan á að það sé ekki augljóst í upphafi hvort $\bar{J}$ sé háð r !

1

Segulstöðufræði

Tilraunir sýna að ekki aðeins rafkraftur verkar á hleðslur

$$\bar{F}_e = q\bar{E}$$

Viðbætist kraftur með annarskonar verkun

$$\bar{F}_m = q\bar{u}\times\bar{B}$$

Leiðir til nýs sviðs, $\bar{B}$, segulflæðissviðs.

Eiginleikum $\bar{B}$ er lýst með tímaóháðu jöfnunum

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0, \quad \bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\bar{J}$$

(2)

Seinni jafnan gefur

$$0 = \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{B}) = \mu_0 \bar{\nabla} \cdot \bar{J} \rightarrow \bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0$$

í samræmi við „stöðufræði".

Fyrri jafnan gefur

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$$

Flæði $\bar{B}$ um lokað yfirborð er alltaf hverfandi í heild

→ ekki eru til frjálsar uppsprettur $\bar{B}$!
eins og hleðslur fyrir $\bar{E}$.
Segul einskaut eru ekki til! ← tilraunaniðurstaða

(3)

Stokes setningin gefur okkur

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$$

$$\rightarrow \int_S (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \cdot d\bar{s} = \mu_0 \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s}$$

$$\rightarrow \oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$

Heildi $\bar{B}$ um lokaða lykkju er jafnt straumnum um lykkjuna

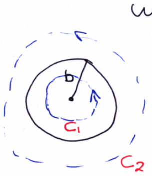
Lögmál Ampères. Hægt að nota á svipaðan hátt og Gauss lögmálið fyrir $\bar{E}$

(4)

Segulstöðufræðinni er lýst með

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 & \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0 \\ \bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} & \oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I \end{array}}$$

Dæmi: Óendanlega langur vír með geisla b og straum I. Finna $\bar{B}$ utan og innan vírs



← veljum heildunarvegi hringlaga sammiðja leiðaranum

(5)

innan

$$d\bar{l} = \hat{a}_\phi r_1 d\phi$$

$$\bar{B}_1 = \hat{a}_\phi B_{\phi 1}$$

Heildið gefur hægrihandar-reglu: þumall í straumstefnu fingur í $\bar{B}$ stefnu

$$\int_{C_1} \bar{B}_1 \cdot d\bar{l} = \int_0^{2\pi} B_{\phi 1} r_1 d\phi = 2\pi r_1 B_{\phi 1}$$

Straumur innan C_1: $I_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi b^2} = \left(\frac{r_1}{b}\right)^2 I$

Því verður

$$\bar{B}_1 = \hat{a}_\phi B_{\phi 1} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 r_1 I}{2\pi b^2} \qquad r_1 \leq b$$

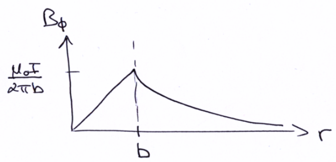
Vex línulega með fjarlægð frá miðju vírs

Utan (6)

$$\bar{B}_2 = \hat{a}_\phi B_{\phi 2}\ , \quad d\bar{l} = \hat{a}_\phi r_2 d\phi$$

$$\oint_{C_2} \bar{B}_2 \cdot d\bar{l} = 2\pi r_2 B_{\phi 2}$$

$$\rightarrow \bar{B}_2 = \hat{a}_\phi B_{\phi 2} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \qquad r_2 \geq b$$



Því sést strax að inni í leiðandi sívalningskel með yfirborðstraum er $\bar{B} = 0$

En utan er sviðið af sama konar tegund

Vigurmættið (7)

Vegna $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ er hægt að finna vigursvið $\bar{A}$ þ.a.

$$\boxed{\bar{B} = \nabla \times \bar{A}}$$

Þessi jafna nægir ekki til að fast ákveða $\bar{A}$

"Öll vigursvið $\bar{A}$ má skipta upp í tvo þætti $\bar{A} = \bar{A}_l + \bar{A}_t$ þ.a. $\nabla \times \bar{A}_l = 0$ og $\nabla \cdot \bar{A}_t = 0$. Því er hægt að bæta $\bar{A}'$ við $\bar{A}$ þ.a. $\nabla \times \bar{A}' = 0$. $\bar{B}$ er óbreytt en $\bar{A}$ er ekki ákvarðað að fullu

Hér stendur t fyrir transverse og l fyrir longitudinal

Skoðum (8)

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} \rightarrow \boxed{\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \mu_0 \bar{J}}$$

Eða

$$\boxed{\nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} = \mu_0 \bar{J}} \quad (*)$$

Í raun þarf að nota $\nabla^2 \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla \times \nabla \times \bar{A}$ sem skilgreiningu á $\nabla^2 \bar{A}$. Í kartísium hnitum fæst

$$\nabla^2 \bar{A} = \hat{a}_x \nabla^2 A_x + \hat{a}_y \nabla^2 A_y + \hat{a}_z \nabla^2 A_z$$

en þessi einföldun er ekki almenn fyrir önnur hnitakerfi

---

(9)

Við sáum áður að $\nabla \times \bar{E} = 0$ var notað til þess að finna V þ.a. $\bar{E} = -\nabla V$

Hér má nota $\nabla \times \bar{A}_l = 0$ til þess að finna skalarmætti sem gefur $\bar{A}_l$: $\bar{A}_l = -\nabla \Phi$ t.d. Þetta skalarmætti fundist aldrei í $\bar{B}$ því

$$\bar{B} = \nabla \times (\bar{A}_t - \nabla \Phi) = \nabla \times \bar{A}_t$$

Því tökum við mesta frelsi sem við höfum og krefjumst

$$\nabla \cdot \bar{A} = 0$$

← A hefur þá aðeins þverhluta

og jafnan verður

$$\boxed{\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J}}$$

Coulombmæli, þvermæli, geislunarmæli

(10)

Í óendanlegu stóðarrúmi er lausn þessarar jöfnu

$$\boxed{\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d{r'}^3 \, \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}} \quad (**)$$

Tengsl $\bar{A}$ og $\bar{B}$, $\boxed{\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}}$ má líka skrifa á heildisformi með því að heilda yfir yfirborð og nota reglu Stokes:

$$\Phi = \int_S \bar{B}\cdot d\bar{s} = \int_S (\bar{\nabla}\times\bar{A})\cdot d\bar{s} = \oint_C \bar{A}\cdot d\bar{l}$$

C er jaðar yfirborðsins S.

$$\rightarrow \quad \boxed{\Phi = \oint_C \bar{A}\cdot d\bar{l}}$$

(11)

Í (**) er stundum fjallað um straumdreifingu sem er einvíð eftir einhverjum lokuðum ferli C'
(J er þá skilgreint með δ-föllum) og jafnan verður

$$\boxed{\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\bar{l}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|}}$$

Segulflóðisviðið er þá

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \bar{\nabla}\times\left(\frac{d\bar{l}'}{R}\right)$$

Notum

$$\bar{\nabla}\times(f\bar{G}) = f\,\bar{\nabla}\times\bar{G} + (\bar{\nabla}f)\times\bar{G}$$

og

$$\bar{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\bar{R}}{R^3} = -\hat{a}_R \frac{1}{R^2}$$

einingar vigur frá $\bar{r}'$ til $\bar{r}$

(12)

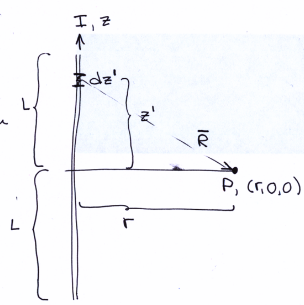
(einnig er ljóst að $\bar{\nabla}\times d\bar{l}' = 0$) því fæst lögmál Biot-Savart

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\bar{l}' \times \hat{a}_r}{|\bar{r}-\bar{r}'|^2}$$

Dæmi

Leiðarabútur með lengd 2L og straum I. Finna $\bar{A}$ í fjarlægð r frá miðjum vír

Leiðarinn heldur áfram, því erum við aðeins að finna $\bar{A}$ í punkti P vegna þessa búts



(13)

$d\bar{l}' = \hat{a}_z dz'$, sívalnings hnit eru þægilegust

$R = \sqrt{(z')^2 + r^2}$

$$\rightarrow \bar{A} = \hat{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^{L} \frac{dz'}{\sqrt{(z')^2+r^2}}$$

$$= \hat{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln\left(z' + \sqrt{(z')^2+r^2}\right)\right]\Bigg|_{-L}^{L}$$

$$= \hat{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln\left\{\frac{\sqrt{L^2+r^2}+L}{\sqrt{L^2+r^2}-L}\right\}$$

$\bar{B}$ má síðan reikna út frá

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A} = \bar{\nabla}\times(\hat{a}_z A_z) = \hat{a}_r \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \hat{a}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

þ.a.

$$\bar{B} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I L}{2\pi r\sqrt{L^2+r^2}}$$

Eða nota Biot-Savart

$$\bar{B}(\bar r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'} \frac{d\bar l' \times \hat a_r}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{d\bar l'\times \bar R}{R^3}$$

með $\bar R = \hat a_r r - \hat a_z z'$, $\quad d\bar l'\times\bar R = \hat a_z dz'\times(\hat a_r r - \hat a_z z') = \hat a_\phi r\, dz'$

og

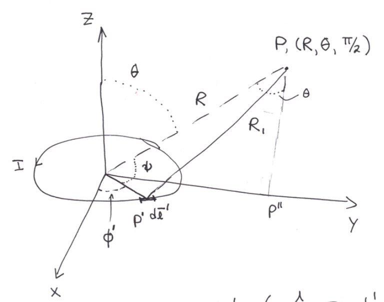
$$\bar B = \hat a_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{r\, dz'}{((z')^2+r^2)^{3/2}} = \hat a_\phi\frac{\mu_0 I L}{2\pi r\sqrt{L^2+r^2}}$$

(14)

Segultvískaut

(1)

Straumlykkja, hringur með geisla b, í x-y-sléttu ber straum I



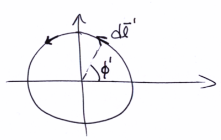
$$\bar A = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{d\bar l'}{R_1}$$

Síðar þegar við viljum skoða markgildið $R >> b$ viljum við miða svæðið við fjarlægðina frá miðju straumlykkju R

$$d\bar l' = \left(-\hat a_x \sin\phi' + \hat a_y\cos\phi'\right) b\, d\phi'$$

(2)

Við höfum fest tímabundið P yfir y-ásnum



Speglað um y-ás finnst samsvarandi $d\bar l'$ þ.a. y-þáttur þessara tveggja straumforma styttist út í heildun

$$\rightarrow \quad \bar A = -\hat a_x \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{b\sin\phi'}{R_1}\,d\phi'$$

Samhverfa gerir nægjanlegt að heilda helming bilsins og margfalda með 2. Eins er augljóst að almennur P gæfi $\hat a_\phi$ í stað $-\hat a_x$

$$\rightarrow \quad \bar A = \hat a_\phi \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin\phi'}{R_1}\,d\phi'$$

(3)

Cósínus regla gefur

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2bR\cos\psi$$

ofanvarpið í tveimur skrefum í staðinn

Skoðum á mynd leiðir í ljós að

$$R\cos\psi = R\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\phi'\right) = R\sin\theta\sin\phi'$$

og

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}\left(1+\frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R}\sin\theta\sin\phi'\right)^{-1/2}$$

Viljum reikna fjær-svið og setjum því $R^2 >> b^2$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{R_1} \simeq \frac{1}{R}\left(1 - \frac{2b}{R}\sin\theta\sin\phi'\right)^{-1/2}$$

$$\approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{b}{R}\sin\theta\sin\phi'\right)$$

4

Því fæst

$$\bar{A} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I b}{2\pi R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1+\frac{b}{R}\sin\theta\sin\phi'\right)\sin\phi'\, d\phi'$$

$$= \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I b^2}{4R^2}\sin\theta \qquad \text{þ. } R>>b$$

og $\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$ gefur

$$\bar{B} = \hat{a}_R \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta) - \hat{a}_\theta \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R A_\phi)$$

$$= \frac{\mu_0 I b^2}{4R^3}\left(\hat{a}_R\, 2\cos\theta + \hat{a}_\theta \sin\theta\right)$$

5

Heildið má leysa nákvæmlega án þess að nota $R>>b$ þá fæst

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 I b}{\pi}\frac{1}{\sqrt{b^2+R^2+2Rb\sin\theta}}\left[\frac{(2-k^2)K(k) - 2E(k)}{k^2}\right]$$

$$k^2 = \frac{4bR\sin\theta}{R^2+b^2+2Rb\sin\theta}$$

og K og E eru fullkomnu sporbaugsheildin

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{da}{\sqrt{1-k^2\sin^2 a}}, \qquad E(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 a}\, da$$

Lausnin er einungis sett hér til þess að sýna að hún sé til í formi vel þekktra falla.

6

Skoðum aftur lausnina

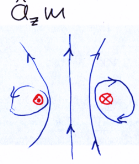
$$\bar{A} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 (I\pi b^2)}{4\pi R^2}\sin\theta$$

Ef skilgreint er tvískauts segulvægið

$$\bar{m} = \hat{a}_z I\pi b^2 = \hat{a}_z I S = \hat{a}_z m$$

þá fæst

$$\boxed{\bar{A} = \frac{\mu_0\, \bar{m}\times\hat{a}_R}{4\pi R^2}}$$



Sambærilegt við mættið frá raftvískauti

$$\boxed{V = \frac{\bar{p}\cdot\hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}}$$

7

Segun og Jafngildur straumþéttleiki

Í efni finnast segultvískaut. Þau geta raðast upp og leitt til segunar M — þéttleiki tvískautvægis

$$d\bar{m} = \bar{M}\, dv'$$

$$\rightarrow d\bar{A} = \mu_0 \frac{\bar{M}\times\hat{a}_R}{4\pi R^2}\, dv' \qquad \text{Er vigursviðið vegna segulvægis lítils rúmfrymis } dv'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\bar{M}\times\bar{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) dv'$$

$$\rightarrow \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\bar{M}\times\bar{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) dv' \qquad \text{Heildar vigursviðið frá efnisbútunum í } V'$$

⑧

Notum vigurlíkinguna $\bar\nabla\times(f\bar G) = f\bar\nabla\times\bar G + (\bar\nabla f)\times\bar G$

$$\rightarrow \bar M\times\bar\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R}\bar\nabla'\times\bar M - \bar\nabla'\times\left(\frac{\bar M}{R}\right)$$

þá fæst

$$\bar A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\bar\nabla'\times\bar M}{R}\,dv' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\bar\nabla'\times\left(\frac{\bar M}{R}\right)dv'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\int_{V'}\frac{\bar\nabla'\times\bar M}{R}\,dv' + \oint_{S'}\frac{\bar M\times\hat a_n'}{R}\,ds'\right\} \quad (*)$$

þ.s. við notuðum

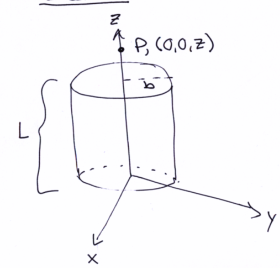
$$\int_{V'}\bar\nabla'\times\bar F\,dv' = -\oint_{S'}\bar F\times d\bar s'$$

⑨

Útlit jöfnunnar segir okkur að í stað $\bar M$ sé hægt að skilgreina segulmagnstraum þéttleika í rúmi og yfirborði þ.a.

$$\boxed{\bar J_m = \bar\nabla\times\bar M\,,\quad \bar J_{ms} = \bar M\times\hat a_n}$$

Dæmi



Finna segulflæðisviðið $\bar B$ á ás stangarseguls með geisla b og lengd L, og einsleita segull

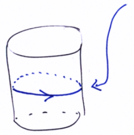
$$\bar M = \hat a_z M_0$$

⑩

Einsleit segull $\rightarrow$ $\bar J_m = \bar\nabla'\times\bar M = 0$

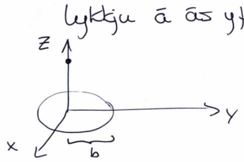
Á hlið sívalningsins

$$\bar J_{ms} = \bar M\times\hat a_n' = (\hat a_z M_0)\times\hat a_r = \hat a_\phi M_0$$



Á endaflötum er $\hat a_n'$ samsíða eða andsamsíða $\bar M$ $\rightarrow$ $\bar J_{ms} = 0$ á endum

Í Ex 6-6 er reiknað segulflæðisvið einnar straumlykkju á ás yfir henni miðri (líka gert í E-2)



$$\bar B = \hat a_z\frac{\mu_0 I b^2}{2(z^2+b^2)^{3/2}}$$

⑪

Nú erum við með sívalningsflöt með straumþéttleika
Frá hverjum hring á yfirborðinu með hæð dz' fæst

$$d\bar B = \hat a_z\frac{\mu_0\,\overbrace{(M_0 dz')}^{I\,=\,J_{ms}dz'}\,b^2}{2\left[(z-z')^2+b^2\right]^{3/2}}$$

Næst heildum við yfir z'

$$\bar B = \hat a_z\int_0^L\frac{\mu_0 M_0 b^2\,dz'}{2\left[(z-z')^2+b^2\right]^{3/2}}$$

$$= \hat a_z\frac{\mu_0 M_0}{2}\left\{\frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2+b^2}}\right\}$$

Norri efni getur segulflæðisviðið $\bar{B}$ raðað upp tvískautum innan efnisins og/eða spanað strauma þ.a.

$$\frac{1}{\mu_0}\bar{\nabla}\times\bar{B} = \bar{J} + \bar{J}_m = \bar{J} + \bar{\nabla}\times\bar{M}$$

$$\rightarrow \bar{\nabla}\times\left(\frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M}\right) = \bar{J}$$

„frjáls straumur"

því er heppilegt að skilgreina segulsvið $\bar{H}$ þ.a.

$$\boxed{\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \quad \rightarrow \bar{\nabla}\times\bar{H} = \bar{J}}$$

Ef efni er línulegt gildir

$$\bar{M} = \chi_m \bar{H}$$

með χ_m segulviðtak

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{B} &= \mu_0(1+\chi_m)\bar{H} \\ &= \mu_0\mu_r \doteq \mu\bar{H}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0}}$$

samanburður

$\bar{E}$	$\bar{B}$
$\bar{D}$	$\bar{H}$
ϵ	$\frac{1}{\mu}$
$\bar{P}$	$-\bar{M}$
ρ	$\bar{J}$
V	$\bar{A}$

Segulrásir

Hvernig flæða $\bar{B}$ og $\bar{H}$ um spennubreyta og fleiri segulrásir

Grunnjöfnur

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{H} = \bar{J}$$

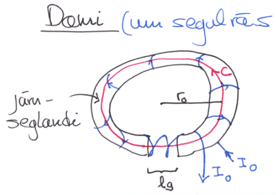
(frjálsi straumurinn sem við viljum stjórna)

Heildisform

$$\oint_C \bar{H}\cdot d\bar{l} = NI = V_m$$

magneto-motive force „straumur"

Dæmi (um segulrás)



Kleinuhringur (hjólflötur) með geil

$2\pi r_0 >> l_g$, þversnið $S << \pi r_0^2$.

$S = \pi a^2$, $a << r_0$

Ekkert flæðistap út fyrir

$$\bar{B}_f = \bar{B}_g = \hat{a}_\phi B_f$$

í járni ↑ í geil

$$\bar{H}_f = \hat{a}_\phi \frac{B_f}{\mu}$$

$$\bar{H}_g = \hat{a}_\phi \frac{B_f}{\mu_0}$$

en við höfum ekki reiknað þessar stærðir enn.

Við höfum aðeins tengt þær

Notum $\oint \bar{H}\cdot d\bar{l} = NI_0$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{B_f}{\mu}(2\pi r_0 - l_g)}_{\text{járn}} + \underbrace{\frac{B_f}{\mu_0} l_g}_{\text{geil}} = NI_0$$

$$\rightarrow \bar{B}_f = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0\mu N I_0}{\mu_0(2\pi r_0 - l_g) + \mu l_g}$$

$$\bar{H}_f = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 N I_0}{\mu_0(2\pi r_0 - l_g) + \mu l_g}$$

$$\bar{H}_g = \hat{a}_\phi \frac{\mu N I_0}{\mu_0(2\pi r_0 - l_g) + \mu l_g}$$

$$\frac{H_g}{H_f} = \frac{\mu}{\mu_0} \longrightarrow$$ segulsviðið er miklu sterkara í gátinu

um segulflæðið gildir hér

$$\Phi = BS$$

$$\Phi = \frac{NI_0}{\frac{(2\pi r_0 - l_g)}{\mu S} + \frac{l_g}{\mu_0 S}} = \frac{V_m}{\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_g}$$

þar sem

$$\mathcal{R}_f = \frac{l_f}{\mu S}, \quad l_f = 2\pi r_0 - l_g$$, Segulviðnám (reluctance)

Vídd $\mathcal{R}$ er (H^{-1})

$$\mathcal{R}_g = \frac{l_g}{\mu_0 S}$$

Φ í segulrásinni hefur sömu stöðu og I í rafrás, og μ hefur stöðu σ

Venjulega í járnseglandi efni tengjast $\bar{B}$ og $\bar{H}$ ólínulega (μ er ekki fasti....) því þarf að skoða þannig verkefni betur.

En hægt er að skrifa „Kirchhoffs"-reglur fyrir segulrásir

$$\boxed{\sum_j N_j I_j = \sum_k \mathcal{R}_k \Phi_k}$$

um lokaðan veg í segulrás er summa ístraumanna jöfn summu margfeldis segulflæðanna og segulviðnámanna

$$\boxed{\sum_j \Phi_j = 0}$$

jafngildir $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$
B-flæðið er varðveitt

Seglandi efni

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

Mótseglandi $\mu_r \lesssim 1, \ \chi_m \lesssim 0$, (diamagnetic)

Meðseglandi $\mu_r \gtrsim 1, \ \chi_m \gtrsim 0$, (Paramagnetic)

Járnseglandi $\mu_r >> 1, \ \chi_m >> 1$, (Ferromagnetic)

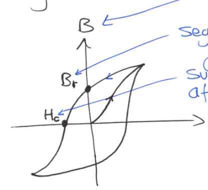
{ Seglun er stórsæ afleiðing skammtafræðinnar. Jafnvel mótseglun er ekki hægt að lýsa með sígildri aflfræði }

Öll efni eru mótseglandi, en önnur hrif geta verið sterkari og falið hana

---

{ Járnseglun er vegna sterkarskiptavíxlverkunar milli rafeinda }
↳ óðul.....

Segulheldni



segulflæðisviðið sem við mælum (heildarsviðið)

segulleifð

sviðið sem þarf t.þ.a. afsegla efnið

ytra segulsviðið

$\mu(H)$, $B = \mu(H)H$

$$\frac{\bar{B}}{\mu_0} = \bar{H} + \bar{M}$$

Til eru enn flóknari flokkar seglandi efnis. . .

Jaðarskilyrði segulsviðs

(7)

$$\bar\nabla\cdot\bar B = 0 \longrightarrow \boxed{B_{1n} = B_{2n}}$$ viðskilflöt

$$\oint_C \bar H\cdot d\bar l = I \longrightarrow \boxed{\hat a_{n2}\times(\bar H_1 - \bar H_2) = \bar J_s}$$

yfirborðsstraumur

$\bar J_s \neq 0$ er notuð einungis fyrir ofurleiðara og hugsaðan kjörleiðara með ofur góða leiðni

Gleymum ekki að við höf lýst bol M með yfirborðstraumi í stangarsegli

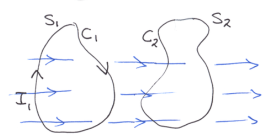
Ef $\bar B_1 = \mu_1\bar H_1$ og $\bar B_2 = \mu_2\bar H_2$ fæst

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Span

(8)

Hugsum tvær straumlykkjur



I_1 leiðir til sviðs og flæðis í gegnum S_2

$$\Phi_{12} = \int_{S_2}\bar B\cdot d\bar s_2$$

Biot-Savart gefur að B_1 tengist I_1 línulega í tómarúmi

Setjum því

$$N_2\Phi_{12} = L_{12}I_1$$

fastinn L_{12} er kallaður víxlspan. Oft er skilgreind flæðistengsl (flux linkage)

$$\Lambda_{12} = N_2\Phi_{12}$$

$$\longrightarrow \Lambda_{12} = L_{12}I_1$$

og því

$$\boxed{L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1}}$$

(9)

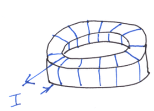
Í flóknara efni verður að notast við

$$\boxed{L_{12} = \frac{d\Lambda_{12}}{dI_1}}$$

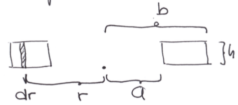
Í hverri rás er einnig sjálfspan

$$\boxed{L_{11} = \frac{d\Lambda_{11}}{dI_1}}$$

Dæmi



þversnið



$$\bar B = \hat a_\phi B_\phi$$

$$d\bar l = \hat a_\phi r\,d\phi$$

B er fasti fyrir fast r, en breytist með r

$$\oint_C \bar B\cdot d\bar l = \int_0^{2\pi} B_\phi r\,d\phi = 2\pi r B_\phi$$

(10)

Nú gildir að

$$\oint_C \bar B\cdot d\bar l = \mu_0 N I$$

$$\longrightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

$$\Phi = \int_S \bar B\cdot d\bar s = \int_S\left(\hat a_\phi\frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\right)\cdot\left(\hat a_\phi h\,dr\right)$$

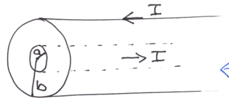
$$= \frac{\mu_0 N I h}{2\pi}\int_a^b\frac{dr}{r} = \mu_0\frac{NIh}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Lambda = N\Phi = \mu_0\frac{N^2 I h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\longrightarrow L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

11

Dæmi   samása kapall



innan innri leiðara $0 \le r \le a$

Reiknað áður

$$\bar{B}_1 = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2}$$

$$\bar{J} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{a}_z$$

gert ráð fyrir jafnri straumdreifingu

Milli leiðara $a \le r \le b$

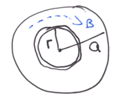
$$\bar{B}_2 = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

samhverfan (snúnings) leyfir aðeins $\hat{a}_\phi$-þátt fyrir segulsviðið

12

Flæðið

Í innri leiðara $0 \le r \le a$
hugsum við okkur þunnan hring með þykkt dr



flæðið inni í þessum hring á einingarlengd í z-stefnu er (milli r og $r+dr$)

$$d\Phi_1' = \frac{\mu_0 I r\,dr}{2\pi a^2}$$

Innan geislans r flytur aðeins hluti straumsins

$$I\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

því eru flæðitengslin

$$d\Lambda_1' = \frac{\mu_0 I r\,dr}{2\pi a^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

og í heild fyrir innri leiðarann

$$\Lambda_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^4}\int_0^a r^3\,dr = \frac{\mu_0 I}{8\pi}$$

$$\rightarrow \boxed{L_1 = \frac{\Lambda_1}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi}}$$

Sjálfspan eins leiðara óháð a!

13

Milli leiðara $a \le r \le b$

$$d\Phi_2' = \frac{\mu_0 I\,dr}{2\pi r}$$

$$\rightarrow \Lambda_2' = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\rightarrow L_2' = \frac{\Lambda_2}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\boxed{L' = L_1' + L_2' = \frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right\}}$$

Síðar verður spanið fyrir þetta kerfi reiknað út frá orkunni í segulflæðinu.

1

Segulorka

Ein straumlykkja, straumur aukinn frá $0 \rightarrow I_1$

Vitum að lykkjan vinnur á móti breytingunni með íspennu

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

Vinnan sem framkvæma þarf

$$W_1 = \int v_1 i_1\,dt = L_1\int_0^{I_1} i_1\,di_1$$

$$= \frac{1}{2}L_1 I_1^2$$

fyrir N-lykkjur fæst

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} L_{jk} I_j I_k$$

Athugum hvort hægt sé að tengja orkuna við segulflæðisviðið í stað straumsins um rásina

Orkuna í þetti mætti hugsa í sviðinu eða hleðslu-uppröðuninni

Segulorka í sviði

Cheng sýnir að orkan í segulflæðisviði sé

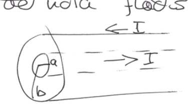
$$W_m = \frac{1}{2}\int_{V'} \overline{H}\cdot\overline{B}\,dv'$$

og því sé segulorkuþéttleikinn

$$w_m = \frac{1}{2}\overline{H}\cdot\overline{B} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2$$

Dæmi

Reiknum aftur L' fyrir samása kapal án þess að nota flæðistengslin Λ.



Í innri leiðaranum

$$W'_{m1} = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^a B_{\phi 1}^2\, 2\pi r\,dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a^4}\int_0^a r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

milli leiðara

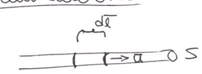
$$W'_{m2} = \frac{1}{2\mu_0}\int_a^b B_{\phi 2}^2\, 2\pi r\,dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

almennt gildir $W_m = \frac{1}{2}LI^2$

$$\rightarrow L' = \frac{2}{I^2}\left(W'_{m1} + W'_{m2}\right) = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Eins og áður, en á miklu einfaldari hátt.

Kraftar og vægi milli straumleiðara



Lorentz kraftinum (segulhlutinn)

$$\overline{F}_m = q\,\overline{u}\times\overline{B}$$

verkar á eindir í leiðara

$$d\overline{F}_m = -neS\,d\ell\,\overline{u}\times\overline{B} = -neS\,|\overline{u}|\,d\overline{\ell}\times\overline{B}$$

n: þéttleiki einda

$d\overline{\ell}$ samsíða $\overline{u}$

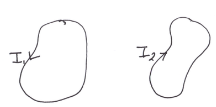
$$I = -neS|\overline{u}|$$

$$\rightarrow d\overline{F}_m = I\,d\overline{\ell}\times\overline{B}$$

Segulkraftinum lokaða rás C með straum í sviðinu B er

$$\overline{F}_m = I\oint_C d\overline{\ell}\times\overline{B}$$

Tvær lokaðar rásir



Kraftur á C_1 vegna segulsviðs frá C_2 er

$$\overline{F}_{21} = I_1\oint_{C_1} d\overline{\ell}_1\times\overline{B}_{21}$$

Biot-Savart

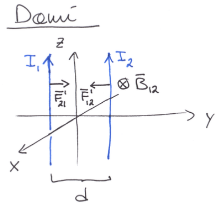
$$\overline{B}_{21} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{d\overline{\ell}_2\times\hat{a}_{R21}}{R_{21}^2}$$

Því er krafturinn milli rásanna

$$\overline{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}I_1 I_2\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\overline{\ell}_1\times(d\overline{\ell}_2\times\hat{a}_{R21})}{R_{21}^2}$$

Í bók er sýnt að $\overline{F}_{21} = -\overline{F}_{12}$ eins og verður að vera

Dæmi



Samsíða straumvírar í x-y-sléttu

Kraftur á vír 2 á lengdareiningu vegna segulflæðisviðs við vír 2 frá straum I_1 í vír 1

$$\overline{F}_{12}' = I_2\left(\hat{a}_z\times\overline{B}_{12}\right)$$

Ampère reglan gefur

$$\overline{B}_{12} = -\hat{a}_x\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \rightarrow \overline{F}_{12}' = -\hat{a}_y\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

Kraftur í áttaðhinum vírnum

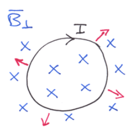
Samsíða straumar $\rightarrow$ aðdráttarkraftur

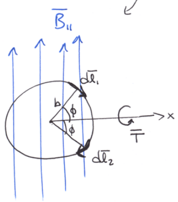
Andsamsíða str. $\rightarrow$ fráhrindikraftur

Lykkja í föstu sviði

$\bar{B} = \bar{B}_\perp + \bar{B}_\parallel$ miðað við lykkju

$\bar{B}_\parallel$ reynir að snúa lykkju





$\bar{B}_\perp$ þenur lykkjuna út eða ýtir saman

$$d\bar{T} = \hat{a}_x\, 2\,(dF)\, b \sin\phi$$

$$= 2\hat{a}_x (I\, dl\, B_\parallel \sin\phi)\, b \sin\phi$$

$$= a_x\, 2 I b^2 B_\parallel \sin^2\phi\, d\phi$$

Ef $dF = |d\bar{F}_1| = |d\bar{F}_2|$

$|d\bar{l}_1| = |d\bar{l}_2| = b\,d\phi$

$$\bar{T} = \int d\bar{T} = \hat{a}_x\, 2 I b^2 B_\parallel \int_0^\pi \sin^2\phi\, d\phi$$

$$= \hat{a}_x I (\pi b^2) B_\parallel$$

Ef við skilgreinum segul-tvískautsvægið

$$\bar{m} = \hat{a}_n I (\pi b^2) = \hat{a}_n I S$$

þá fæst

$$\boxed{T = \bar{m} \times \bar{B}}$$

$\left(\text{því } \bar{m} \times (\bar{B}_\perp + \bar{B}_\parallel) = \bar{m} \times \bar{B}_\parallel\right)$

gildir aðeins í föstu einsleitu sviði

Kraftar reiknaðir út frá orkuvarðveislu

Fast flæði

Kerfi rása. Hvikun einnar rásar um $d\bar{l}$ leiðir ekki til flæðisbreytingar -> engin orka flytur til rásanna

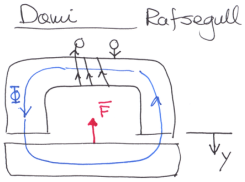
mekanísk vinna kerfisins

$$\bar{F}_\Phi \cdot d\bar{l} = -dW_m$$

$$= -(\bar{\nabla} W_m) \cdot d\bar{l}$$

minnkar orku þess

Dæmi Rafsegull



aukin geil dy eykur orku kerfisins um dW_m (Φ er fasti)

$$dW_m = d(W_m)_{geil} = 2\left(\frac{B^2}{2\mu_0} S\, dy\right)$$

$$= \frac{\Phi^2}{\mu_0 S} dy$$

aðdráttarkraftur

$$\bar{F}_\Phi = \hat{a}_y (F_\Phi)_y = -\hat{a}_y \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}$$

$$\left(\bar{F}_\Phi = -(\bar{\nabla} W_m) \cdot d\bar{l}\right)$$

Fastir straumar

Í þessu tilfelli eru rásirnar tengdar við straumvaka sem vinna gegn íspennunni í kerfinu og leggja til orku.

$$dW_s = \sum_k I_k\, d\Phi_k$$

þessi orka er jöfn mekanísku vinnunni sem kerfið framkvæmir og viðbót í segulorku

$$dW_s = dW + dW_m$$

$$dW_m = \frac{1}{2} \sum_k I_k\, d\Phi_k = \frac{1}{2} dW_s$$

því fæst fyrir vinnu kerfis

$$dW = \bar{F}_I \cdot d\bar{l} = dW_m$$

$$= (\bar{\nabla} W_m) \cdot d\bar{l}$$

$$\rightarrow \boxed{\bar{F}_I = \bar{\nabla} W_m}$$

(10)

Endurreiknum seguldæmið

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_c + \frac{2y}{\mu_0 S}}$$

seguliðnám kjarna

geila

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N^2}{\mathcal{R}_c + \frac{2y}{\mu_0 S}}$$

$$\bar{F}_I = \bar{\nabla} W_m = \frac{1}{2}\bar{\nabla}(LI^2)$$

$$= \hat{a}_y \frac{I^2}{2}\frac{dL}{dy} = -\hat{a}_y \frac{1}{\mu_0 S}\left(\frac{NI}{\mathcal{R}_c + \frac{2y}{\mu_0 S}}\right)^2 = -\hat{a}_y \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}$$

Sama svar og áður fyrir kraftinn!

(11)

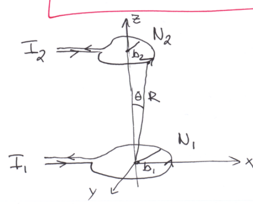
Kraftar frá víxlspani

Tvær lykkjur (spólur)

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

fastur straumur

$$\boxed{\bar{F}_I = I_1 I_2 \bar{\nabla} L_{12}}$$



í spólu 2

$$\bar{A}_{12} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 N_1 I_1 b_1^2}{4R^2} \sin\theta$$

$$= \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 N_1 I_1 b_1^2}{4R^2}\left(\frac{b_2}{R}\right)$$

$$= \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 N_1 I_1 b_1^2 b_2}{4(z^2 + b_2^2)^{3/2}}$$

$$\Phi_{12} = \oint_{C_2} \bar{A}_{12} \cdot d\bar{l}_2$$

$$= \int_0^{2\pi} A_{12}\, b_2\, d\phi$$

$$= \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 N_1 I_1 b_1^2 b_2^2 \pi}{2(z^2 + b_2^2)^{3/2}}$$

(12)

$$L_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi b_1^2 b_2^2}{2(z^2 + b_2^2)^{3/2}}$$

$$\bar{F}_{12} = \hat{a}_z I_2 I_1 \left.\frac{dL_{12}}{dz}\right|_{z=d} = -\hat{a}_z I_1 I_2 \frac{3\mu_0 N_1 N_2 \pi b_1^2 b_2^2 d}{2(d^2 + b_2^2)^{5/2}}$$

$$\simeq -\hat{a}_z \frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi d^4} \quad \text{ef } d \gg b$$

ef

$$m_1 = N_1 I_1 \pi b_1^2 \qquad m_2 = N_2 I_2 \pi b_2^2$$

(1)

Tímaháð svið og jöfnur Maxwells

Í rafstöðufræði var

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0$$

notað t.þ.a finna rafmætti V þ.a.

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V$$

því almennt gildir

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} V) = 0$$

tilraunir á tímaháðum sviðum hefur leitt til endurbótar á jöfnunni

$$\boxed{\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\bar{B}}$$

Rafsviðið er því ekki geymið þar sem segulflæði breytist með tíma. Það er ekki til mættisfall fyrir $\bar{E}$

Á heildisformi fæst

$$\boxed{\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s}} \quad (*)$$

Almenn leið C og yfirborð S óháð leiðurum og rásum

Ef C er eftir rás má túlka

$$\oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} = V$$

sem íspennu rásarinnar vegna breytinga á segulflæðinu um S

$$\Phi = \int_S \bar{B}\cdot d\bar{s}$$

(*) verður þá

$$\boxed{V = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Lögmál Faradays

> Íspennan í lokaðri rás (kyrri) er jöfn neikvæðri breytingu segulflæðisins um rásina

Lögmál Lenz

> Íspennan skapar straum sem veldur segulsviði til þess að viðhalda ytra segulsviðinu

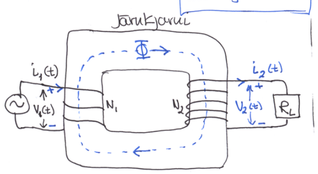
↑ neikvæða formerkið

(2)

Spennubreytir

Athugum einfaldan spennubreyti

Örvar og spennur eiga hér við visst augnablik í tíma



Breytingin á Φ í seinni spólunni veldur íspennu í henni samkvæmt lögmáli Faradays

Áður höfðum við um segulrásir

$$\sum_j N_j I_j = \sum_k \mathcal{R}_k \Phi_k$$

Lögmál Lenz segir okkur að íspennan í spólu 2 vinni móti segulflæðinu frá spólu 1

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathcal{R}\,\Phi$$

Heili einfaldi kjarninn gefur

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$$

(3)

Kjör spennubreytir

$\mu \to \infty$

$$\to \boxed{\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}}$$

Faraday gefur

$$v_1 = N_1\frac{d\Phi}{dt}$$

$$v_2 = N_2\frac{d\Phi}{dt}$$

(Miðað við augnablikið fleiðnað upp hér að framan)

$$\to \boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}}$$

Álagsviðnámið R_L leiðir til virks álags

$$(R_1)_{eff} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)v_2}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)i_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L$$

fyrir sínus AC-gjafa fæst fyrir samviðnámið

$$\boxed{(Z_1)_{eff} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L}$$

(4)

Raunspennir

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \frac{l}{\mu S}\Phi$$

$$\to \begin{cases} \Lambda_1 = N_1\Phi = \frac{\mu S}{l}\left(N_1^2 i_1 - N_1 N_2 i_2\right) \\ \Lambda_2 = N_2\Phi = \frac{\mu S}{l}\left(N_1 N_2 i_1 - N_2^2 i_2\right) \end{cases}$$

$$v_1 = N_1\frac{d\Phi}{dt} = L_1\frac{di_1}{dt} - L_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = N_2\frac{d\Phi}{dt} = L_{12}\frac{di_1}{dt} - L_2\frac{di_2}{dt}$$

með

$$L_1 = \frac{\mu S}{l}N_1^2 \qquad L_{12} = \frac{\mu S}{l}N_1 N_2$$

$$L_2 = \frac{\mu S}{l}N_2^2$$

því sést að $\mu \to \infty$ áður er jafngilt $L_i \to \infty$

Ef ekkert flæði lekur

$$L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$$

annars

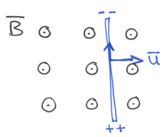
$$L_{12} = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad k < 1$$

tengistuðull

Viðnám . . . . – .

(5)

Leiðari á hreyfingu í föstu segulsviði



fastur hraði $\overline{u}$ →
kraftur á hleðslur
innan stangar

$$\overline{F}_m = q\overline{u} \times \overline{B}$$

Rafeindir færast að
öðrum endanum

og valda spennu milli enda

Án ytri rásar verða þessir kraftar
í jafnvægi

hreyfiíspennan er

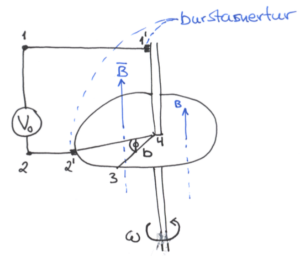
$$V'_{21} = \int_1^2 (\overline{u} \times \overline{B}) \cdot d\ell$$

fyrir lokaða rás fæst

$$V' = \oint_C (\overline{u} \times \overline{B}) \cdot d\overline{\ell}$$

hreyfiíspennan í rásinni

Dæmi Faraday skífa



$$\overline{B} = \hat{a}_z B_0$$

$$V_0 = \oint (\overline{u} \times \overline{B}) \cdot d\overline{\ell}$$

$$= \int_3^4 \left\{ (\hat{a}_\phi r\omega) \times \hat{a}_z B_0 \right\} \cdot (\hat{a}_r dr)$$

$$= \omega B_0 \int_b^0 r\,dr = -\frac{\omega B_0 b^2}{2}$$

Hér er í raun sama hvar radial leiðið
er valið að vera $(3 \to 4)$

Hvernig tengjast þessar tvær aðferðir til að finna V?

q hreyfist með $\overline{u}$ á sviði
með $\overline{E}$ og $\overline{B}$

Á q verkar Lorentz-kraftur

$$\overline{F} = q(\overline{E} + \overline{u} \times \overline{B})$$

Athugandi á q sér enga hreyfingu
og álítur $\overline{F}$ á q vera vegna

$$\overline{E}' = \underbrace{\overline{E} + \overline{u} \times \overline{B}}$$

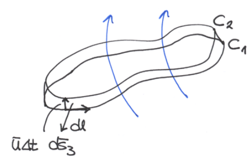
Því er íspennan í rás
á hreyfingu vegna tveggja
þátta

$$\boxed{\begin{aligned} &\oint_C \overline{E}' \cdot d\overline{\ell} \\ &= -\int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \cdot d\overline{s} \\ &+ \oint_C (\overline{u} \times \overline{B}) \cdot d\overline{\ell} \end{aligned}}$$

Almennt lögmál
Faradays

Athugum betur

Rás C hreyfist frá C_1 í t
í C_2 á $t+dt$ í $\overline{B}$



Milli C_1 og C_2 liggur
flötur S_3

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S \overline{B} \cdot d\overline{s}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{S_2} \overline{B}(t+\Delta t) \cdot d\overline{s}_2 - \int_{S_1} \overline{B}(t) \cdot ds_1 \right\}$$

$$\overline{B}(t+\Delta t) = \overline{B}(t) + \frac{\partial}{\partial t}\overline{B}(t) \cdot \Delta t + \cdots$$

því fæst

$$\frac{d}{dt}\int_S \overline{B} \cdot d\overline{s} = \int_S \frac{\partial}{\partial t}\overline{B} \cdot d\overline{s}$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{S_2} \overline{B} \cdot d\overline{s}_2 - \int_{S_1} \overline{B} \cdot d\overline{s}_1 + \cdots \right\}$$

$\overline{B} = \overline{B}(t)$ hér

notum nú að $\bar\nabla\cdot\bar B = 0$ og

div setningin krefur á um normal vigur út úr rúmmálinu

$$0 = \int_V \bar\nabla\cdot\bar B\, dv = \int_{S_2}\bar B\cdot d\bar s_2 - \int_{S_1}\bar B\cdot d\bar s_1 + \int_{S_3}\bar B\cdot d\bar s_3$$

$$d\bar s_3 = d\bar l\times\bar u\,\Delta t \quad , \quad \bar B\cdot(d\bar l\times\bar u)\Delta t = d\bar l\cdot\bar u\times\bar B\,\Delta t$$

$$\to \int_{S_2}\bar B\cdot d\bar s_2 - \int_{S_1}\bar B\cdot d\bar s_1 = -\Delta t\oint_C(\bar u\times\bar B)\cdot d\bar l$$

eða í heild

$$\frac{d}{dt}\int_S\bar B\cdot d\bar s = \int_S\frac{\partial\bar B}{\partial t}\cdot d\bar s - \oint_C(\bar u\times\bar B)\cdot d\bar l$$

$$\to \boxed{V' = -\frac{d}{dt}\int_S\bar B\cdot d\bar s = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Lögmál Faradays gildir því bæði um rásir á hreyfingu eða kyrrstöðu

Skiptingin í hreyfi íspennu og íspennu er ekki einkvæm

Dæmi aftur skífa Faradays

Segulflæðið í gegnum sneiðina 2'342'

$$\Phi = \int_S\bar B\cdot d\bar s = B_0\int_0^b r\,dr\int_0^{\omega t}d\phi = B_0(\omega t)\frac{b^2}{2}$$

$$\to V_0 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\omega B_0 b^2}{2}$$

Sama og áður

Stærð sneiðar skiptir ekki máli hér!

Jöfnur Maxwells

Höfum tengt $\bar E$ og $\bar B$ með

$$\bar\nabla\times\bar E = -\frac{\partial\bar B}{\partial t}$$

Jafnan $\bar\nabla\times\bar H = \bar J$ uppfyllir ekki varðveislu hleðslu

$$\bar\nabla\cdot(\bar\nabla\times\bar H) = 0 = \bar\nabla\cdot\bar J$$

En $\bar\nabla\cdot\bar J = 0$ gildir ekki almennt heldur

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \bar\nabla\cdot\bar J = 0$$

því er bætt við lið

$$\bar\nabla\cdot(\bar\nabla\times\bar H) = 0 = \bar\nabla\cdot\bar J + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\bar\nabla\cdot(\bar\nabla\times\bar H) = \bar\nabla\cdot\left(\bar J + \frac{\partial}{\partial t}\bar D\right)$$

eða

$$\bar\nabla\times\bar H = \bar J + \frac{\partial}{\partial t}\bar D$$

Tilraunir sýna að nú erum við komin með fullkomið safn jafna

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bar\nabla\times\bar E = -\dfrac{\partial\bar B}{\partial t}, & \bar\nabla\times\bar H = \bar J + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar D \\ \bar\nabla\cdot\bar D = \rho, & \bar\nabla\cdot\bar B = 0 \end{array}}$$

Jöfnur Maxwells

sem á heildis formi verða

$$\boxed{\begin{array}{ll} \oint_C\bar E\cdot d\bar l = -\dfrac{d\Phi}{dt}, & \oint_C\bar H\cdot d\bar l = I + \int_S\dfrac{\partial}{\partial t}\bar D\cdot d\bar s \\ \oint_S\bar D\cdot d\bar s = Q & \oint_S\bar B\cdot d\bar s = 0 \end{array}}$$

Mættisföll

3

Í segulstöðufræði var $\nabla\cdot\bar{B} = 0$ notað t.þ.a. finna vigurmætti $\bar{B} = \nabla\times\bar{A}$

Þessi jafna er óbreytt fyrir tímaháð svið

$\longrightarrow$ Höldum $\bar{A}$ þ.a. $\bar{B} = \nabla\times\bar{A}$

Við veljum V þannig til þess að fyrir tímaóháð svið fáist aftur $\bar{E} = -\nabla V$

Athugum í lögmáli Faradays

$$\nabla\times\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\bar{B}$$

$$\to \nabla\times\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\bar{A}) \quad \to \quad \nabla\times\left(\bar{E} + \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Því er hægt að finna skalarmætti þ.a.

$$\bar{E} + \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

4

Því fæst

$$\boxed{\bar{E} = -\nabla V - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}}$$

Því er tímaháð $\bar{E}$ ekki einungis vegna hleðslu í gegnum $-\nabla V$ heldur einnig vegna breytilegs segulflæðis í gegnum $-\frac{\partial}{\partial t}\bar{A}$

Því er álitlegt að jöfnurnar

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho}{R}\,dv' \quad \text{og} \quad \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\bar{J}}{R}\,dv'$$

haldi nema fyrir næstum tímaóháð svið

(þessi svið eru lausnir jöfnu Poissons, sem er óháð tíma)

5

Leitum því jafna fyrir $\bar{A}$ og V sem uppfylla jöfnur Maxwells

Byrjum með

$$\nabla\times\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t}\bar{D}$$

Notum fyrst $\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu}$ og $\bar{D} = \epsilon\bar{E}$

og gerum ráð fyrir einsleitu efni, μ og ϵ eru þá fastar

$$\longrightarrow \nabla\times\bar{B} = \mu\bar{J} + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\bar{E}$$

Síðan líka $\bar{B} = \nabla\times\bar{A}$ og $\bar{E} = -\nabla V - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}$

$$\to \nabla\times\nabla\times\bar{A} = \mu\bar{J} + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}\right)$$

6

Notum

$$\nabla\times\nabla\times\bar{A} = \nabla(\nabla\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A}$$

og fáum

$$\boxed{\nabla(\nabla\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A} = \mu\bar{J} - \nabla\left(\mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A}} \quad (*)$$

Til þess að ákvarða vigur $\bar{A}$ þarf bæði að ákvarða $\nabla\cdot\bar{A}$ og $\nabla\times\bar{A}$ (langs- og þverþátt $\bar{A}$)

Við höfum $\bar{B} = \nabla\times\bar{A}$

Kvarðafrelsi....
Lorentz kvarði
margir aðrir möguleikar til

Ákvörðum langsþáttinn sem

$$\boxed{\nabla\cdot\bar{A} + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}V = 0}$$

þá verður (*)

$$① \quad \boxed{\nabla^2\bar{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} = -\mu\bar{J}}$$

Hliðruð bylgjujafna fyrir $\bar{A}$

(7)

Byrjum nú með

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho \quad \text{og} \quad \bar{D} = \epsilon\bar{E}$$

og

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}V - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho \rightarrow \epsilon\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \rho \rightarrow -\bar{\nabla}\cdot\epsilon\left(\bar{\nabla}V + \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}\right) = \rho$$

$$\longrightarrow \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Notum nú Lorentz kvörðun $\bar{\nabla}\cdot\bar{A} = -\mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}V$

$$\longrightarrow \boxed{\nabla^2 V - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}V = -\frac{\rho}{\epsilon}} \quad (2)$$

Hliðruð bylgjujafna fyrir V

Hliðraðar bylgjujöfnur (1)+(2) ákvarða $\bar{A}$ og V

(8)

Frá jöfnum Maxwells má finna jaðarskilyrðin

$$\boxed{\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ \hat{a}_{n2}\times(\bar{H}_1 - \bar{H}_2) &= \bar{J}_s \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a}_{n2}\cdot(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) &= \rho_s \\ B_{1n} &= B_{2n} \end{aligned}}$$

Ekki óháð skilyrði

jafngildar

jafngildar

(9)

Tveir rafsvarar með

$\rho_s = 0, \quad \bar{J}_s = 0$

Ekkert orkutap

$$E_{1t} = E_{2t} \rightarrow \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

$$H_{1t} = H_{2t} \rightarrow \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Rafsvari (1)	Kjörleiðari (2)
$E_{1t} = 0$	$E_{2t} = 0$
$\hat{a}_{n2}\times\bar{H}_1 = \bar{J}_s$	$H_{2t} = 0$
$\hat{a}_{n2}\cdot\bar{D}_1 = \rho_s$	$D_{2n} = 0$
$B_{1n} = 0$	$B_{2n} = 0$

(10)

Lausnir bylgjujafna

Veljum punkt hleðslu $\rho(t)\Delta v'$ í miðju kúluhnitakerfi.

utan miðju gildir

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) - \mu\epsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

Rammi er einsleitt, punkthleðslan leiðir til kúlusamhverfu.

Engin átt er sérstæðari en önnur

um myndum

$$V(R,t) = \frac{1}{R}U(R,t)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

Einvíð bylgjujafna

Almennu lausnirnar eru öll tvídiffranleg föll af $(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$ eða $(t + R\sqrt{\mu\epsilon})$

Við sjáum rétt bráðum að eðlisfræðilega lausnin er

$$U(R,t) = f(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$$

(11)

$$U(R+\Delta R, t+\Delta t) = f\left(t+\Delta t - (R+\Delta R)\sqrt{\mu\epsilon}\right) = f(t - R\sqrt{\epsilon\mu})$$

ef $\Delta t = \Delta R\sqrt{\mu\epsilon} = \Delta R/u$

$\rightarrow \Delta R = u\Delta t$

$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ er útbreiðsluhraði bylgjunnar

Þrívíða jafnan hefur lausnina

$$V(R,t) = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{u}\right)$$

Hefði punkt hleðslan verið óháð tíma hefði fengist lausn

$$\Delta V(R) = \frac{\rho \Delta v'}{4\pi\epsilon R}$$

(12)

Samanburður við lausn bylgjujöfnunar gefur því

$$\Delta f\left(t - \frac{R}{u}\right) = \frac{\rho\left(t - \frac{R}{u}\right)\Delta v'}{4\pi\epsilon}$$

og almennu lausnirnar eru

$$\boxed{\begin{aligned} V(R,t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\rho\left(t - \frac{R}{u}\right)}{R}\, dv' \\ \bar{A}(R,t) &= \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\bar{J}\left(t - \frac{R}{u}\right)}{R}\, dv' \end{aligned}}$$

Seinkuðu lausnir bylgju jafnanna í einsleitu rúmi (bylgja berst út eftir breytingu uppsprettu) við hentum óeðlisfræðilegu flýttu lausnunum

(1)

__Aðeins um kvarða__

Við útleiðslu á bylgjujöfnunum

$$\nabla^2\bar{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} = -\mu\bar{J}$$

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

notuðum við Lorentz-kvarðann

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{A} + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}V = 0$$

Enn er þó frelsi eftir, því breytingin

$$\bar{A} \rightarrow \bar{A} + \bar{\nabla}\Lambda$$

$$V \rightarrow V - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda$$

með

$$\nabla^2\Lambda - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda = 0$$

Breytir ekki Lorentz-kvarðanum

Eins hefðum við getað valið Coulomb-kvarðann í stað Lorentz-kvarðans

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{A} = 0$$

þá fengjust jöfnurnar

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2\bar{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} &= -\mu\bar{J} + \mu\epsilon\bar{\nabla}\frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned}}$$

Poisson jafnan fyrir V!
Til viðbótar má finna að aðeins $\bar{J}_t$ skiptir máli í seinni jöfnunni og svið án seinkunar styttast út. Mikið notað...

(2)

__Lotubundin svið í tíma__

Maxwell jöfnurnar eru línulegar

→ Lotubundnar sveiflur í uppsprettum leiða til sviða með sömu lotu þegar stöðug ástönd eru stöðuð

→ fourier greining (raðir eða umformun) leyfir okkur að fjalla um almenna tímaþróun

tímaháðinnar samhverfa

Notum fasora táknun.
Ef rafsvið er tímaháð með $\cos(\omega t)$ þá verður notað

$$\bar{E}(\bar{x},t) = \Re e\left[\bar{E}(\bar{x})e^{i\omega t}\right]$$

þ.s. $\bar{x} = (x,y,z)$ t.d.

því er greinilegt að $\frac{\partial}{\partial t}\bar{E}(\bar{x},t)$ mun verða táknað með $i\omega\bar{E}(\bar{x})$

þátturinn $e^{i\omega t}$ mun styttast út úr jöfnunum

③

Jöfnur Maxwells verða

$$\boxed{\begin{aligned} \bar\nabla\times\bar E &= -i\omega\mu\bar H \\ \bar\nabla\times\bar H &= \bar J + i\omega\epsilon\bar E \\ \bar\nabla\cdot\bar E &= \frac{\rho}{\epsilon}, \quad \bar\nabla\cdot\bar H = 0 \end{aligned}}$$

Bylgjujöfnurnar verða

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 V + k^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2\bar A + k^2\bar A &= -\mu\bar J \\ k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} &= \frac{\omega}{u} \end{aligned}}$$

Í einsleitu rúmi var lausnin áður

$$V(R,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\rho(t-\frac{R}{u})}{R}\,dv'$$

Ef $\rho(R,t) = \Re e\left[\rho(R)e^{i\omega t}\right]$

þá fæst fyrir seinkaða sviðið

$$\rho(R,t-\tfrac{R}{u}) = \Re e\left[\rho(R)e^{i\omega(t-\frac{R}{u})}\right]$$

og þar sem $k = \frac{\omega}{u}$ fæst

$$\rho(R,t-\tfrac{R}{u}) = \Re e\left[\rho(R)e^{i\omega t}e^{-ikR}\right]$$

④

Því verða lausnirnar táknaðar með fösorum

$$\boxed{\begin{aligned} V(R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\rho e^{-ikR}}{R}\,dv' \\ A(R) &= \frac{\mu}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\bar J e^{-ikR}}{R}\,dv' \end{aligned}}$$

Hér er gott að muna að $R = |\bar x - \bar x'|$ þ.s. $\bar x$ er athugunarpunktur og $\bar x'$ er uppsprettupunktur

Bylgjulengdin $\lambda = \frac{u}{f}$ getur verið mjög mism. m.v. R í okkar dæmum

$$k = \frac{2\pi f}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Almennt er

$$e^{-ikR} = 1 - ikR + \frac{k^2R^2}{2} + \cdots$$

Því fæst ef $kR \ll 1$

$$e^{-ikR} \approx 1$$

~~að~~ fasor-lausnirnar líkjast tímaóháðu lausnunum

Langbylgjunálgun .....
eða
Nær-lausn ....

⑤

Sviðum án uppspretta má lýsa með

$$\bar\nabla\times\bar E = -i\omega\mu\bar H$$
$$\bar\nabla\times\bar H = i\omega\epsilon\bar E$$
$$\bar\nabla\cdot\bar E = 0, \quad \bar\nabla\cdot\bar H = 0$$

Athugum

$$\bar E = \frac{1}{i\omega\epsilon}\bar\nabla\times\bar H$$

notum í 1. jöfnunni

$$\bar\nabla\times\bar E = \frac{1}{i\omega\epsilon}\bar\nabla\times\bar\nabla\times\bar H = -i\omega\mu\bar H$$

Eða

$$\frac{1}{i\omega\epsilon}\left\{\bar\nabla(\bar\nabla\cdot\bar H) - \nabla^2 H\right\} = -i\omega\mu\bar H$$

$$-\nabla^2 H = \omega^2\epsilon\mu\bar H$$

eða

$$\boxed{\nabla^2\bar H + k^2\bar H = 0}$$

því $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$

Á svipaðan hátt fæst

$$\boxed{\nabla^2\bar E + k^2\bar E = 0}$$

Óhliðraðar Helmholtz jöfnur fyrir vigursviðin $\bar H$ og $\bar E$

⑥

Skoðum aftur

$$\bar\nabla\times\bar H = \bar J + i\omega\epsilon\bar E$$

Ef einsleita efnið er leiðandi þá gildir

$$\bar J = \sigma\bar E$$

og jafnan verður

$$\begin{aligned} \bar\nabla\times\bar H &= (\sigma + i\omega\epsilon)\bar E \\ &= i\omega\left(\epsilon + \frac{\sigma}{i\omega}\right)\bar E \\ &= i\omega\left(\epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}\right)\bar E \\ &= i\omega\epsilon_c\bar E \end{aligned}$$

þar sem ϵ_c er tvinngildur rafsvörunarstuðull

$$\epsilon_c = \epsilon' - i\epsilon''$$

með

$$\epsilon' = \epsilon$$
$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$$

ϵ'' lýsir sveiflum úr fasa við uppsprettur. Úr fasa vegna viðnámskrafta, dofnunar...

orkutap
~~Tapkornið~~ δ_c er

$$\tan\delta_c = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \simeq \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

7

Góður leiðari

$\sigma \gg \omega\epsilon$

Góður einangrari

$\omega\epsilon \gg \sigma$

því getur leiðari verið góður við lága tíðni en leiðnin versnar við hækkandi tíðni

Almennt eru ϵ' og ϵ'' líka föll af ω

lesa sjálf um rafsegulrófið í enda 7. kafla

Skoða λ-skala og orkuskala

$hf = \hbar\omega$ og bera saman við $k_B T \approx 25\ \text{meV}$ fyrir herbergishita

8

Flatar bylgjur

Á svæði án hleðslu eða strauma fékkst

$$\nabla^2 \bar{E} + k_0^2 \bar{E} = 0$$

og samskonar fyrir $\bar{H}$.

k_0 er bylgjutalan í tómarúmi

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{\omega}{c}$$

Í kartískum hnitum er jafnan

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\right) E_x = 0$$

fyrir hnitið E_x

Hugsum okkur bylgju með einsleitu E_x á sléttum þvert á z

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_x = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_x = 0$$

og jafnan verður

$$\frac{d^2}{dz^2} E_x + k_0^2 E_x = 0$$

Lausnir

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-ik_0 z} + E_0^- e^{ik_0 z}$$

fastar, almennir

9

Athugum fasorinn

$$E_0^+ e^{-ik_0 z}$$

Hvað gerir hann í tíma

$$E_x^+(z,t) = \Re\left[E_x^+ e^{i(\omega t - k_0 z)}\right]$$

$$= E_0^+ \cos(\omega t - k_0 z)$$

Bylgja sem ferðast. Fastur fasinn

$$\omega t - k_0 z = \text{fastur fasi}$$

og könnum fasahraðann

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c$$

k_0 tengist λ_0

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}}$$

Hinn fasorinn E_x^- gefur bylgju sem ferðast í $-z$-stefnu með sama fasahraða

Ef við þurfum aðeins bylgju í z-stefnu

$$E_0^- = 0$$

10

Með þessu rafsviði fylgir segulsvið

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -i\omega\mu_0 \bar{H}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x^+(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -i\omega\mu_0\left(\hat{a}_x H_x^+ + \hat{a}_y H_y^+ + \hat{a}_z H_z^+\right)$$

$$\rightarrow H_x^+ = 0$$

$$H_y^+ = \frac{1}{-i\omega\mu_0} \frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z}$$

$$H_z^+ = 0$$

$$\frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(E_0^+ e^{-ik_0 z}\right) = -ik_0 E_x^+(z)$$

$$\rightarrow H_y^+ = \frac{k_0}{\omega\mu_0} E_x^+(z) = \frac{1}{\eta_0} E_x^+(z)$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \simeq 377\ \Omega$$

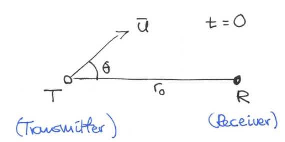
eigið samviðnám tómsins

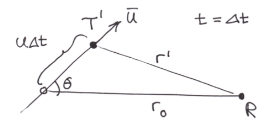
$\eta_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \bar{E}$ og $\bar{B}$ hafa sama fasa

$$\bar{H}(z,t) = \hat{a}_y H_y^+(z,t)$$
$$= \hat{a}_y \,\mathrm{Re}\left[H_y^+(z) e^{i\omega t}\right]$$
$$= \hat{a}_y \frac{E_0^+}{\eta_0} \cos(\omega t - k_0 z)$$

$\bar{E}$ og $\bar{H}$ eru hornrétt og líka á útbreiðslustefnuna $\hat{a}_z$

Dopplerhrif





Bylgja frá T klukkan $t=0$ kemur til R kl. $t_1 = \frac{r_0}{c}$

bylgja kl. $t=\Delta t$ frá T' kemur til R kl.

$$t_2 = \Delta t + \frac{r'}{c}$$
$$= \Delta t + \frac{1}{c}\sqrt{r_0^2 + (u\Delta t)^2 - 2r_0(u\Delta t)\cos\theta}$$
$$\approx \Delta t + \frac{r_0}{c}\left(1 - \frac{u\Delta t}{r_0}\cos\theta\right)$$

ef $r_0 \gg u\Delta t$

Tímamunur merkjanna í R er

$$\Delta t' = t_2 - t_1 \simeq \Delta t + \frac{r_0}{c}\left(1 - \frac{u\Delta t}{r_0}\cos\theta\right) - \frac{r_0}{c}$$
$$= \Delta t\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right)$$

því er $\Delta t'$ mælt við hljóðnemann ekki sama og Δt mælt við uppsprettuna

Hljóðneminn heyrir tíðnina

$$f' = \frac{1}{\Delta t'} \simeq \frac{1}{\Delta t\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right)}$$
$$= \frac{f}{\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right)} \simeq f\left(1 + \frac{u}{c}\cos\theta\right)$$

Ef $\left(\frac{u}{c}\right)^2 \ll 1$

$\boxed{\text{Rauðvik, Blávik}}$

Þverrafsegulbylgjur

Rafsegulbylgja í z-átt var með fasor

$$\bar{E}(z) = \bar{E}_0 e^{-ikz}$$

fyrir almenna stefnu fáum við

$$E(\bar{x}) = \bar{E}_0 e^{-ik_x x - ik_y y - ik_z z}$$

ef

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

eins og jafna Helmholtz krefst.

Skilgreinum bylgjuvigur

$$\bar{k} = \hat{a}_x k_x + \hat{a}_y k_y + \hat{a}_z k_z = k\hat{a}_n$$

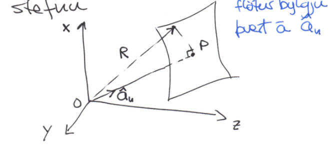
og staðavigur

$$\bar{R} = \hat{a}_x x + \hat{a}_y y + \hat{a}_z z$$

þá fæst

$$\bar{E}(\bar{R}) = \bar{E}_0 e^{-i\bar{k}\cdot\bar{R}} = \bar{E}_0 e^{-ik\hat{a}_n\cdot\bar{R}}$$

$\hat{a}_n$ er einingarvigur í útbreiðslustefnu



(4)

$k_x = \bar{k}\cdot\hat{a}_x = k\hat{a}_n\cdot\hat{a}_x$

og samskonar fyrir $y, z \dots$

stefnukósinus fyrir $\hat{a}_n$

$\hat{a}_n\cdot\bar{R} = \text{fasti} = |\overline{OP}|$

er jafna sléttunnar

þvert á $\hat{a}_n$, með

føstum fasa og útslag

Engin hleðsla á útbreiðslusvøði

$\rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0$

$\rightarrow \bar{E}_0\cdot\bar{\nabla}\left(e^{-ik\hat{a}_n\cdot\bar{R}}\right) = 0$

$$\bar{\nabla}\left(e^{-ik\hat{a}_n\cdot\bar{R}}\right) = \left(\hat{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial y}\right) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$= -i\left(\hat{a}_x k_x + \hat{a}_y k_y + \hat{a}_z k_z\right)e^{-i(k_x x + \dots + k_z z)}$$

$$= -ik\hat{a}_n e^{-ik\hat{a}_n\cdot\bar{R}}$$

En

$$-ik(\bar{E}_0\cdot\hat{a}_n)e^{-ik\hat{a}_n\cdot\bar{R}} = 0$$

sum verður aðeins með

$$\hat{a}_n\cdot\bar{E}_0 = 0$$

$\bar{E}_0$ er þvert á útbreiðslustefnu $\hat{a}_n$

(5)

Segulsviðið finnum við við

$$\bar{H} = \frac{1}{-i\omega\mu}\bar{\nabla}\times\bar{E}$$

$$\rightarrow \boxed{\bar{H}(\bar{R}) = \frac{1}{\eta}\hat{a}_n\times\bar{E}(\bar{R})}$$

við $\eta = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

ella

$$\boxed{\bar{H}(\bar{R}) = \frac{1}{\eta}(\hat{a}_n\times\bar{E}_0)e^{-ik\hat{a}_n\cdot\bar{R}}}$$

Svo eins og búast mátti við á svøði án ρ og J eru $\bar{E}$ og $\bar{H}$ hornrætt og líka á útbreiðslustefnuna $\hat{a}_n$

Skautan

Skoðum

$$\bar{E}(z) = \hat{a}_x E_1(z) + \hat{a}_y E_2(z)$$

$$= \hat{a}_x E_{10}e^{-ikz} - \hat{a}_y i E_{20}e^{-ikz}$$

Sett saman úr tveimum línulega skautaðum pørtum, annar er 90° á eftir hinum í fasa

(6)

Skoðum þessa bylgju í føstum tímapunkti

$$\bar{E}(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\left[\hat{a}_x E_1(z) + \hat{a}_y E_2(z)\right]e^{i\omega t}\right\}$$

$$= \hat{a}_x E_{10}\cos(\omega t - kz) + \hat{a}_y E_{20}\cos(\omega t - kz - \pi/2)$$

Skoðum stefnubroytingu $\bar{E}(z,t)$ þ. $z=0$ en tíðin líður

$$\bar{E}(0,t) = \hat{a}_x E_1(0,t) + \hat{a}_y E_2(0,t)$$

$$= \hat{a}_x E_{10}\cos\omega t + \hat{a}_y E_{20}\sin\omega t$$

$$\rightarrow \cos\omega t = \frac{E_1(0,t)}{E_{10}} \qquad \sin\omega t = \frac{E_2(0,t)}{E_{20}} = \sqrt{1-\cos^2\omega t} = \sqrt{1-\left(\frac{E_1(0,t)}{E_{10}}\right)^2}$$

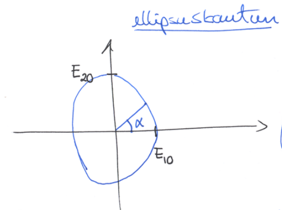
(7)

þ.a.

$$\left\{\frac{E_2(0,t)}{E_{20}}\right\}^2 + \left\{\frac{E_1(0,t)}{E_{10}}\right\}^2 = 1$$

jafna sporbaugs (ellipsu)

ellipsuskautan



Ef $E_{20} = E_{10}$ ← hringskautan

$$\alpha = \arctan\left(\frac{E_2(0,t)}{E_1(0,t)}\right) = \arctan(\tan\omega t) = \omega t$$

Høgri handar hring ella ellipsu skautan (jákvæð hringskautan)

Vinstri handar hringskautan fæst með $-\omega t$ snúningi

línulig skautan $\bar{E}(z) = \hat{a}_x E_0 e^{-ikz}$

$$\bar{E}(z) = \bar{E}_{rc}(z) + \bar{E}_{lc}(z)$$

við

$$\bar{E}_{rc}(z) = \frac{E_0}{2}(\hat{a}_x - i\hat{a}_y)e^{-ikz}$$

$$\bar{E}_{lc}(z) = \frac{E_0}{2}(\hat{a}_x + i\hat{a}_y)e^{-ikz}$$

8

Flatarbylgjur í efni með orkutapi

$$\nabla^2 \bar{E} + k_c^2 \bar{E} = 0$$

$$k_c = \omega\sqrt{\mu\epsilon_c} \in \mathbb{C}$$

Venja að skilgreina

$$\gamma = ik_c = i\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

og ef

$$\epsilon_c = \epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}$$

$$\rightarrow \gamma = \alpha + i\beta = i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1 + \frac{\sigma}{i\epsilon\omega}\right)^{1/2}$$

eða með $\epsilon_c = \epsilon' - i\epsilon''$ fæst

$$\gamma = \alpha + i\beta = i\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left(1 - i\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^{1/2}$$

α og β eru raun og þverhlutar γ

án taps er

$$\boxed{\begin{array}{l}\sigma = 0,\ \epsilon'' = 0,\ \epsilon = \epsilon' \\ \alpha = 0,\ \beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\end{array}}$$

9

Jafna Helmholtz er hér

$$\nabla^2 \bar{E} - \gamma^2 \bar{E} = 0$$

og fyrir slétta bylgju í z-stefnu línulega skautaða í x-átt

$$\bar{E} = \hat{a}_x E_x = \hat{a}_x E_0 e^{-\gamma z} = \hat{a}_x E_0 e^{-\alpha z} e^{-i\beta z}$$

α, β eru báðar jákvæðar stærðir (kemur í ljós)

α : deyfingarfasti

β : fasafasti

Rafsvari með litlu tapi

$$\epsilon' \gg \epsilon'' \quad \text{eða} \quad \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$$

$$\gamma = \alpha + i\beta \simeq i\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left(1 - \frac{i\epsilon''}{2\epsilon'} + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right)$$

$$\rightarrow \alpha \simeq \frac{\omega\epsilon''}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \quad \leftarrow \text{línulegt í } \omega$$

$$\beta \simeq \underbrace{\omega\sqrt{\mu\epsilon'}}_{\text{nánast}}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right]$$

10

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\left(1 - i\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^{-1/2} \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\left(1 + i\frac{\epsilon''}{2\epsilon'}\right)$$

Hlutfall E_x og H_y hér →

$\boxed{\text{rafsviðið og segulsviðið eru ekki í fasa eins og í efni án taps}}$

fasahraðinn er núna

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}}\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right] \quad \leftarrow \text{minnkar fasahraði vegna taps}$$

α-þáttur k_c birtist ekki í efninu

11

Góður leiðari

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$$

$$\gamma = i\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left(1 + \frac{\sigma}{i\omega\epsilon}\right)^{1/2}$$

$$\simeq i\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{\frac{\sigma}{i\omega\epsilon}}$$

$$= \sqrt{i}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

$$\rightarrow \gamma = \alpha + i\beta \simeq (1+i)\sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

$$\rightarrow \alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \simeq \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma}} = (1+i)\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} = (1+i)\frac{\alpha}{\sigma}$$

→ Segulsviðið er á eftir rafsviðinu í fasa um $\frac{\pi}{4}$

fasahraðinn

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \simeq \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

í réttu hlutfalli við $\sqrt{f}$ og $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$

fyrir góðan leiðara eins og kopar fæst að

$u_p \approx 720$ m/s

fyrir $f = 3$ MHz

Dofnunin er líka stórt $\alpha = \beta$, bylgjan dofnar niður í e^{-1} → skilgreinir lengd

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Skindýpt (ekki skinn....)

→ fyrir örbylgjur er skindýptin orðin lítil

Sjá töflu 8-1

Gull $\delta = 0{,}0025$ mm fyrir $f = 1$ GHz

Rafgas

Venjulega í heild óhlaðið

Rafeindir + jónir í efri loftlögum ← geislun sólar

Rafeindir í málmi, jónir kristallsins

......

Einfalt líkan

Ímyndum okkur rafeind bundna samkv. lögmáli Hooks

$$-e\bar{E} = m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -m\omega^2\bar{x}$$

hvikun rafeindarinnar er

$$\bar{x} = \frac{e}{m\omega^2}\bar{E}$$

Tökum m. fasorum, ytra sviðið er lotubundið.

→ tilverður skautun

$$\bar{p} = -e\bar{x}$$

fyrir N rafeindir í einingarrúmi fæst skautunarþéttnin

$$\bar{P} = N\bar{p} = -\frac{Ne^2}{m\omega^2}\bar{E}$$

því fæst

$$\bar{D} = \epsilon_0\bar{E} + \bar{P} = \epsilon_0\left(1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2\epsilon_0}\right)\bar{E} = \epsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\bar{E}$$

þar sem

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$$

er rafgastíðnin, náttúrulegur tíðniskali rafgass.

$$\epsilon_p = \epsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

$$\gamma = i\omega\sqrt{\mu\epsilon_0}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

→ Ef $\omega < \omega_p$

→ $\gamma \in \mathbb{R}$, engin bylgja berst. Dofnun

→ Ef $\omega > \omega_p$

γ hefur einungis þverhluta

Bylgja berst án dofnunar

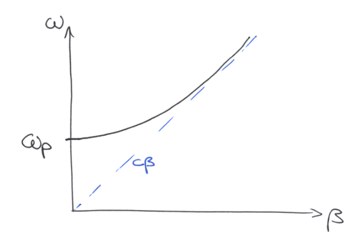
ω_p er þröskuldstíðni

Þegar $\epsilon_p = 0$ þarf hverfandi ytri truflun $\bar{D}$ til þess að koma af stað plasmasveiflum með tilheyrandi sveiflum í $\bar{E}$ (sem dofna ekki).

Rafgasherma

Betri útleiðsla sýnir að bæði eru til þver- og langbylgjur í rafgasinu. Í 3D hafa báðar sömu þröskuldstíðnina

Alltaf dofnun til staðar en hún getur verið lítil......



Hvað með plasma-rásir í stað rafrása ?

4

Grúpuhraði

Í taplausum miðli

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}$$

var fasahraðinn u_p fasti.

fyrir efni með tapi er ϵ fall af ω og því ólíklegt að u_p sé fasti.

↓

Tvístrun (dispersion)

púls með bylgjum með mism. tíðni líðast í sundur með t

Hver bylgja hefur fasahraða og púlsinn hefur grúpuhraða

(fasahraði er nothæft hugtak fyrir merki með þröngt tíðnisvið.)

Skoðum tvær bylgjur með tíðni og fasastuðla

$$\omega_0 + \Delta\omega, \qquad \beta_0 + \Delta\beta$$

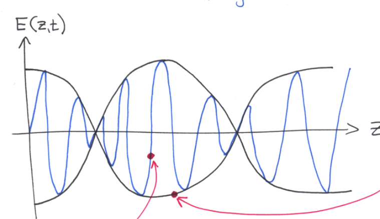
$$\omega_0 - \Delta\omega, \qquad \beta_0 - \Delta\beta$$

5

$$E(z,t) = E_0 \cos\left[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z\right]$$

$$+ E_0 \cos\left[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z\right]$$

$$= \underbrace{2E_0 \cos(t\Delta\omega - z\Delta\beta)}_{\text{útslagið}} \cos(\omega_0 t - \beta_0 z)$$



grúpuhraði $t\Delta\omega - z\Delta\beta$ = fa

$$u_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\omega}\right)}$$

og almennari jafna er

$$\boxed{u_g = \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)}}$$

fasahraði $\omega_0 t - \beta_0 z$ = fasti

$$\rightarrow \boxed{u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega_0}{\beta_0}}$$

6

Skoðum fyrir rafgasbylgjuna

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon_0}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

$$= \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

fyrir $\omega > \omega_p$ berst bylgja með fasahraða

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

og grúpuhraða

$$u_g = \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)} = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

því er

$u_p \geq c$, $\quad u_g \leq c$

og $\boxed{u_p u_g = c^2}$ hér.

Almennt má tengja u_g og u_p

$$u_p = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{u_p}\right) = \frac{1}{u_p} - \frac{\omega}{u_p^2}\frac{du_p}{d\omega}$$

$$\rightarrow u_g = \frac{u_p}{1 - \frac{\omega}{u_p}\underbrace{\frac{du_p}{d\omega}}_{\text{tvístrun}}}$$

7

því sést:

Engin tvístrun

$$\frac{du_p}{d\omega} = 0 \rightarrow u_g = u_p$$

Venjuleg tvístrun

$$\frac{du_p}{d\omega} < 0 \rightarrow u_g < u_p$$

fasahraði minnkar með vaxandi tíðni

Afbrigðileg tvístrun

$$\frac{du_p}{d\omega} > 0 \rightarrow u_g > u_p$$

fasahraði vex með vaxandi tíðni

passar ekki við myndina af tveimur bylgjum lögðum saman hér að framan

→ afbrigðilegt

Orkuflæði

Við höfum tvær jöfnur Maxwells sem lýsa tímabreytingum

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial}{\partial t}\overline{D}$$

Ennfremur gildir um $\overline{E} \times \overline{H}$

$$\overline{\nabla} \cdot (\overline{E} \times \overline{H}) = \overline{H} \cdot (\overline{\nabla} \times E) - \overline{E} \cdot (\overline{\nabla} \times \overline{H})$$

almenn vigurjafna

Notum, til þess að umskrifa

$$\overline{\nabla} \cdot (\overline{E} \times \overline{H}) = -\overline{H} \cdot \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} - \overline{E} \cdot \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} - \overline{E} \cdot \overline{J}$$

Tökum einfalt efni þar sem ϵ, μ og σ eru óháð t

$$\overline{H} \cdot \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = \overline{H} \cdot \frac{\partial (\mu \overline{H})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mu \overline{H} \cdot \overline{H})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right)$$

$$\overline{E} \cdot \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} = \overline{E} \cdot \frac{\partial (\epsilon \overline{E})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\epsilon \overline{E} \cdot \overline{E})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon E^2\right)$$

(8)

Eins er $\overline{E} \cdot \overline{J} = \overline{E} \cdot (\sigma \overline{E}) = \sigma E^2$

því fæst

$$\overline{\nabla} \cdot (\overline{E} \times \overline{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) - \sigma E^2$$

Heildum yfir rúmið V og breytum fyrsta liðnum í flatarheildi

$$\oint_S (\overline{E} \times \overline{H}) \cdot d\overline{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) dv - \int_V \sigma E^2 dv$$

Skilgreinum $\boxed{\overline{\mathcal{P}} = \overline{E} \times \overline{H}}$ vigur Poyntings

og notum

$$w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\epsilon \overline{E} \cdot \overline{E}^* \quad \text{orkuþéttleiki rafsviðs}$$

$$w_m = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\mu \overline{H} \cdot \overline{H}^* \quad \text{-||- segulsviðs}$$

skoðum betur næst

(9)

$$p_\sigma = \sigma E^2 = J^2/\sigma = \sigma \overline{E} \cdot \overline{E}^* = \overline{J} \cdot \overline{J}^*/\sigma$$

afl þétt-leiki v. viðnáms

þá verður jafnan

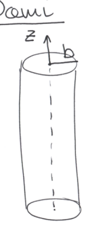
$$\boxed{-\oint_S \overline{\mathcal{P}} \cdot d\overline{s} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V (w_e + w_m)\, dv + \int_V p_\sigma\, dv}$$

Heildaraflið sem flæðir inn í V um S leiðir til aukningar á geymdri segul og rafortu og aflsins sem eyðist í viðnámi innan V

(10)

$\overline{\mathcal{P}}$ er vigur sem sýnir flæði aflþéttleika

Dæmi



Langur leiðandi vír ber straum I (d.c.)

$$\overline{J} = \hat{a}_z \frac{I}{\pi b^2}, \quad \overline{E} = \frac{\overline{J}}{\sigma} = \hat{a}_z \frac{I}{\sigma \pi b^2}$$

Við yfirborð vírsins er

$$\overline{H} = \hat{a}_\phi \frac{I}{2\pi b}$$

því er Poyntingvigurinn á yfirborðinu

$$\overline{\mathcal{P}} = \overline{E} \times \overline{H} = (\hat{a}_z \times \hat{a}_\phi) \frac{I^2}{2\sigma \pi^2 b^3} = -\hat{a}_r \frac{I^2}{2\sigma \pi^2 b^3}$$

inní vírinn

(11)

heildum yfir yfirborðið

„lengd" vírs

$$-\oint_S \bar{\mathcal{S}}\cdot d\bar{s} = -\oint_S \mathcal{S}\cdot \hat{a}_r \, ds = \left(\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}\right)2\pi b l$$

$$= I^2\left(\frac{l}{\sigma\pi b^2}\right) = I^2 R$$

flæði afls inn í vírinn

$R = \frac{l}{\sigma S}$

Orkan sem eyðist vegna viðnáms vírs

Athugum fasora betur

fyrir rafsviðið höfðum við fasorinn

$$\bar{E}(z) = \hat{a}_x E_x(z) = \hat{a}_x E_0 e^{-(\alpha+i\beta)z}$$

Sem gefur tímaháða sviðið

$$\bar{E}(z) = \Re e\left[\bar{E}(z) e^{i\omega t}\right]$$

$$= \hat{a}_x E_0 e^{-\alpha z}\, \Re e\left[e^{i(\omega t-\beta z)}\right]$$

$$= \hat{a}_x E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

fyrir segulsviðið fæst

$$\bar{H}(z) = \hat{a}_y H_y(z)$$

$$= \hat{a}_y \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{-i(\beta z+\theta_\eta)}$$

með $\eta = |\eta| e^{i\theta_\eta}$

og því er

$$\bar{H}(z,t) = \Re e\left[\bar{H}(z) e^{i\omega t}\right]$$

$$= \hat{a}_y \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)$$

Vinnureglur okkar fyrir fasora eru í lagi fyrir jöfnur með línulegum liðum.

Hvað með Poynting?

Skoðum vinstri og hægri hlið ójöfnunnar

$$\Re e\left[\bar{E}(z)e^{i\omega t}\right]\times \Re e\left[\bar{H}(z)e^{i\omega t}\right]$$

$$\neq \Re e\left[\bar{E}(z)\times \bar{H}(z) e^{i\omega t}\right]$$

Vinstri

Notum

$$\Re e(\bar{A})\times\Re e(\bar{B}) = \frac{1}{2}(\bar{A}+\bar{A}^*)\times\frac{1}{2}(\bar{B}+\bar{B}^*)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(\bar{A}\times\bar{B}^* + \bar{A}^*\times \bar{B}) + (\bar{A}\times\bar{B} + \bar{A}^*\times\bar{B}^*)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\Re e\left(\bar{A}\times\bar{B}^* + \bar{A}\times\bar{B}\right)$$

t.þ.a. fá

$$\bar{\mathcal{S}}(z,t) = \bar{E}(z,t)\times\bar{H}(z,t)$$

$$= \Re e\left[\bar{E}(z)e^{i\omega t}\right]\times\Re e\left[\bar{H}(z)e^{i\omega t}\right]$$

$$= \hat{a}_z \frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)\cos(\omega t-\beta z-\theta_\eta)$$

$$= \hat{a}_z\frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\left\{\cos\theta_\eta + \cos(2\omega t + 2\beta z - \theta_\eta)\right\}$$

En hægri hliðin er

$$\Re e\left[\bar{E}(z)\times\bar{H}(z)e^{i\omega t}\right]$$

$$= \hat{a}_z\frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\cos(\omega t-2\beta z-\theta_\eta)$$

Venjulega er meiri áhugi á meðaltali $\bar{\mathcal{S}}$

$$\bar{\mathcal{S}}_{av}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T \bar{\mathcal{S}}(z,t)\,dt$$

$$= \hat{a}_z\frac{E_0^2}{2|\eta|}e^{-2\alpha z}\cos\theta_\eta$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Vinstri hliðin gaf

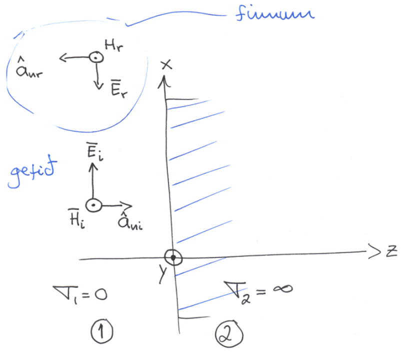
$$\mathcal{S}(z,t) = \Re e\left[\bar{E}(z)e^{i\omega t}\right]\times\Re e\left[\bar{H}(z)e^{i\omega t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Re e\left[\bar{E}(z)\times\bar{H}^*(z) + \underbrace{\bar{E}(z)\times\bar{H}(z)e^{2i\omega t}}\right]$$

meðaltalið yfir T gerir þetta að engu

$$\boxed{\bar{\mathcal{S}}_{av} = \frac{1}{2}\Re e\left(\bar{E}\times\bar{H}^*\right)}$$

Þverbylgja fellur lóðrétt á góðan leiðara



Gefin innbylgja

$$\bar{E}_i(z) = \hat{a}_x E_{io} e^{-i\beta_1 z}$$

$$\bar{H}_i(z) = \hat{a}_y \frac{E_{io}}{\eta_1} e^{-i\beta_1 z}$$

Vigur Poynting fyrir innbylgjuna í ① er

$$\bar{S}_i(z) = \bar{E}_i(z) \times \bar{H}_i(z)$$

er í $\hat{a}_z$-átt

í ② eru $\bar{E}_2 = 0$, $\bar{H}_2 = 0$

Engin bylgja berst inn í ②

Búumst við speglaðri bylgju

$$\bar{E}_r(z) = \hat{a}_x E_{ro} e^{+i\beta_1 z}$$

Heildarrafsviðið í ① er

$$\bar{E}_1(z) = \bar{E}_i(z) + \bar{E}_r(z) = \hat{a}_x\left(E_{io} e^{-i\beta_1 z} + E_{ro} e^{+i\beta_1 z}\right)$$

Þáttur $\bar{E}_1$ samsíða leiðara er samfelldur

$$\bar{E}_1(0) = \hat{a}_x (E_{io} + E_{ro}) = \bar{E}_2(0) = 0$$

$$\rightarrow E_{ro} = -E_{io}$$

Rafsviðið í ① er því

$$\bar{E}_1(z) = \hat{a}_x E_{io}\left(e^{-i\beta_1 z} - e^{+i\beta_1 z}\right) = -\hat{a}_x i 2 E_{io} \sin(\beta_1 z)$$

---

fyrir segulsviðið

$$\bar{H}_r(z) = \frac{1}{\eta_1} \hat{a}_{nr} \times \bar{E}_r(z) = \frac{1}{\eta_1}(-\hat{a}_z) \times \bar{E}_r(z) = -\hat{a}_y \frac{1}{\eta_1} E_{ro} e^{+i\beta_1 z} = \hat{a}_y \frac{E_{io}}{\eta_1} e^{+i\beta_1 z}$$

Heildarsegulsviðið í ① er því

$$\bar{H}_1(z) = \bar{H}_i(z) + \bar{H}_r(z) = \hat{a}_y 2 \frac{E_{io}}{\eta_1} \cos(\beta_1 z)$$

$\boxed{\bar{E}_1(z) \text{ og } \bar{H}_1(z) \text{ bera með sér að í ① er ekkert } \underline{\text{meðal}}\text{-flæði afls}}$

fyrir tímaháðu sviðin fæst

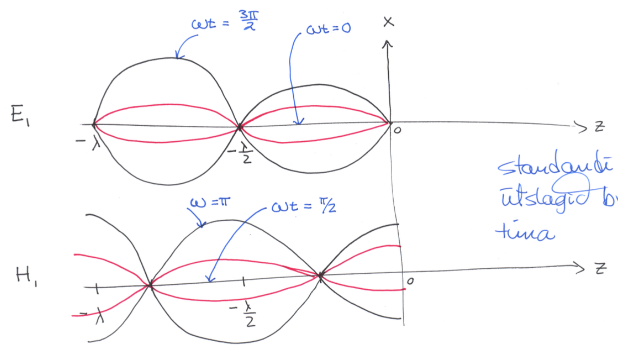
$$\bar{E}_1(z,t) = \mathrm{Re}\left[\bar{E}_1(z) e^{i\omega t}\right] = \hat{a}_x 2 E_{io} \sin(\beta_1 z) \sin\omega t$$

og

$$\bar{H}_1(z,t) = \hat{a}_y 2 \frac{E_{io}}{\eta_1} \cos(\beta_1 z) \cos\omega t$$

$E_1(z,t) = 0$ þ. $\beta_1 z = -n\pi$, $z = -n\frac{\lambda}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

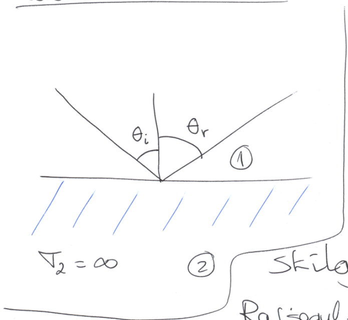
$H_1(z,t) = 0$ þ. $\beta_1 z = -(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $z = -(2n+1)\frac{\lambda}{4}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$



standandi bylgjur, útslagið breytist með tíma

(8)

Þverbylgja fellur á leiðara undir horni



Þverbylgja fellur á leiðara

$\bar{k}_i$: útbreiðslubylgjuvigur rafsegulbylgju sem fellur á leiðara og normal þverill yfirborðs leiðarans skilgreina innfallsflöt bylgjunnar

Rafsegulfræðin er línuleg því getum við fjallað sér um tilfellið þ.e. $\bar{E}$ liggur í þessari sléttu, eða er þvert á hana

(9)

Ástæðan fyrir því að fjalla um þessi tilfelli sér er að í fyrra tilfellinu er $\bar{H}$ samhliða skilfletinum en í hinu er $\bar{E}$ samhliða honum

↑

Mismunandi jaðarskilyrði fyrir $\bar{E}$ og $\bar{H}$

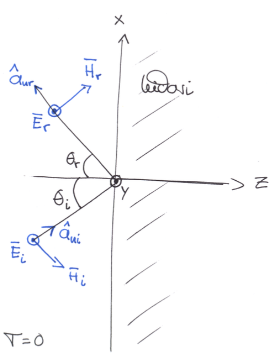
Síðan verður líka fjallað um skilfleti tóms og rafsvara

(1)

Speglun í leiðandi yfirborði

Endanlegt innfallshorn

Lárétt skautun – E-skautun



Innbylgjan með

$$\hat{a}_{ui} = \hat{a}_x \sin\theta_i + \hat{a}_z \cos\theta_i$$

θ_i : Innfallshorn

$$\bar{E}_i(x,z) = \hat{a}_y E_{i0} e^{-i\beta_1 \hat{a}_{ui} \cdot \bar{R}} = \hat{a}_y E_{i0} e^{-i\beta_1 (x \sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\bar{H}_i(x,z) = \frac{1}{\eta_1}\left[\hat{a}_{ui} \times \bar{E}_i(x,z)\right] = \frac{E_{i0}}{\eta}\left(-\hat{a}_x \cos\theta_i + \hat{a}_z \sin\theta_i\right) \cdot e^{-i\beta_1 (x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

(2)

Speglaða bylgjan

$$\hat{a}_{ur} = \hat{a}_x \sin\theta_r - \hat{a}_z \cos\theta_r$$

θ_r: speglunarhorn

því er speglaða rafsviðið

$$\bar{E}_r(x,z) = \hat{a}_y E_{r0} e^{-i\beta_1 (x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

Í yfirborðinu verður heildarrafsviðið að hverfa

Gengur aðeins fyrir öll x ef

$$E_{r0} = -E_{i0}$$

$$\theta_r = \theta_i$$

Lögmál Snells fyrir speglun

$$\bar{E}_1(x,0) = \bar{E}_i(x,0) + \bar{E}_r(x,0) = \hat{a}_y\left(E_{i0} e^{-i\beta_1 x \sin\theta_i} + E_{r0} e^{-i\beta_1 x\sin\theta_r}\right) = 0$$

③

Því er speglaða segulsviðið

$$\bar{H}_r(x,z) = \frac{1}{\eta_1}\left[\hat{a}_{nr} \times \bar{E}_r(x,z)\right]$$

$$= \frac{E_{io}}{\eta_1}\left(-\hat{a}_x \cos\theta_i - \hat{a}_z \sin\theta_i\right) \cdot e^{-i\beta_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)}$$

* Standbylgja í z-átt
Enginn meðal orku flutningur í z-átt

* Bylgja berst í x-átt samsíða yfirborðinu

$$u_{1x} = \frac{\omega}{\beta_{1x}} = \frac{\omega}{\beta_1 \sin\theta_i} = \frac{u_1}{\sin\theta_i}$$

$$\lambda_{1x} = \frac{\lambda_1}{\sin\theta_i}$$

Heildarsviðin eru

$$\bar{E}_1(x,z) = \bar{E}_i(x,z) + \bar{E}_r(x,z)$$

$$= -\hat{a}_y E_{io}\, 2i \sin(\beta_1 z\cos\theta_i)\, e^{-i\beta_1 x \sin\theta_i}$$

$$\bar{H}_1(x,z) = -2\frac{E_{io}}{\eta_1}\left[\hat{a}_x \cos\theta_i \cos(\beta_1 z\cos\theta_i) + \hat{a}_z i \sin\theta_i \sin(\beta_1 z \cos\theta_i)\right] \cdot e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i}$$

④

* Bylgjan í x-átt er misleit slétt bylgja þar sem hún er háð z-hniti

* Víxlmynstur milli inn og út bylgju
Við skoðum ekki speglun þröngsgeisla, heldur flatar bylgju á „stóran" flöt.

* $\bar{E}_1 = 0$ fyrir öll x þegar $\sin(\beta_1 z\cos\theta_i) = 0$

$\longrightarrow$ Ef $\beta_1 z \cos\theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_1} z\cos\theta_i = -m\pi$, $m = 1, 2, 3, \dots$

því myndi flatur leiðari í $z = \frac{m\lambda_1}{2\cos\theta_i}$ engu breyta um bylgjurnar milli þessara tveggja leiðara

↳ er TE þverrafsviðs bylgja í bylgjuleiðara

$E_{1x} = 0$

Vigur Poyntings liggur líka í x-átt.

⑤

yfirborðsstraumur

$$H_1(x,0) = -\frac{E_{io}}{\eta_1}(\hat{a}_x 2\cos\theta_i)\, e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i}$$

Innan leiðara hverfa $\bar{E}_2$ og $\bar{H}_2$

$\longrightarrow$ því er stökk í $\bar{H}$ sem tengist yfirborðsstraumi

Þessi straumur veldur speglaðu bylgjunni og skyttir út bylgjunni sem hefði farið inn í leiðarann

$$\bar{J}_s(x) = \hat{a}_{n2} \times \bar{H}_1(x,0)$$

$$= (-\hat{a}_z) \times (-\hat{a}_x)\frac{E_{io}}{\eta_1}(2\cos\theta_i)\, e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i}$$

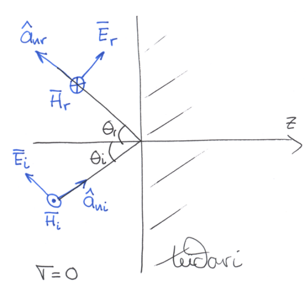
$$= \hat{a}_y \frac{E_{io}}{\eta_1}(2\cos\theta_i)\, e^{-i\beta_1 x \sin\theta_i}$$

$$\bar{J}_s(x,t) = \hat{a}_y \frac{E_{io}}{\eta_1} 2\cos\theta_i \cos\left\{\omega\left(t - \frac{x}{u_1}\sin\theta_i\right)\right\}$$

⑥

Samsíða skautun

Hornrétt skautun, H-skautun



$$\bar{E}_i(x,z) = E_{io}(\hat{a}_x\cos\theta_i - \hat{a}_z \sin\theta_i) \cdot e^{-i\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\bar{H}_i(x,z) = \hat{a}_y \frac{E_{io}}{\eta_1} e^{-i\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

og speglaðu bylgjurnar

$$\bar{E}_r(x,z) = E_{ro}(\hat{a}_x \cos\theta_r + \hat{a}_z \sin\theta_r)\, e^{-i\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

$$\bar{H}_r(x,z) = -\hat{a}_y \frac{E_{ro}}{\eta_1} e^{-i\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

Í z = 0 verður þáttur heildarrafsviðsins samsíða leiðaranum að hverfa

(7)

$$(E_{io}\cos\theta_i)e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i} + (E_{ro}\cos\theta_r)e^{-i\beta_1 x\sin\theta_r} = 0$$

$$\longrightarrow \quad E_{ro} = -E_{io}\,, \quad \theta_r = \theta_i$$

Heildarsviðið verður

$$\overline{E}_1(x,z) = -2E_{io}\left\{\hat{a}_x\, i\cos\theta_i \sin(\beta_1 z\cos\theta_i) + \hat{a}_z \sin\theta_i \cos(\beta_1 z\cos\theta_i)\right\} \cdot e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i}$$

og

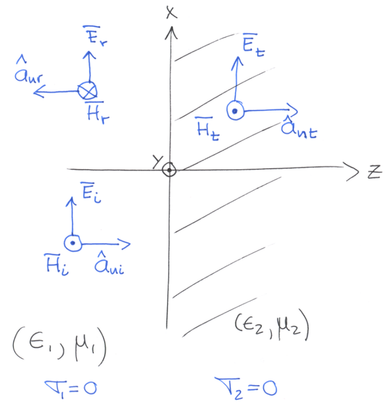
$$\overline{H}_1(x,z) = \hat{a}_y\, 2\frac{E_{io}}{\eta_1}\cos(\beta_1 z\cos\theta_i)e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i}$$

* Aftur misleit slétt bylgja í x-átt
* TM - bylgja, $H_{1x} = 0$

Þunnur leiðari í $z = -\frac{m\lambda_1}{2\cos\theta_i}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ breytir engu

(8)

Lóðrétt bylgja á skilflöt tveggja rafsvara



Veljum innbylgju

$$\overline{E}_i(z) = \hat{a}_x E_{io} e^{-i\beta_1 z}$$

$$\overline{H}_i(z) = \hat{a}_y \frac{E_{io}}{\eta_1} e^{-i\beta_1 z}$$

Speglaða bylgju

$$\overline{E}_r(z) = \hat{a}_x E_{ro} e^{+i\beta_1 z}$$

$$\overline{H}_r(z) = (-\hat{a}_z) \times \frac{1}{\eta_1}\overline{E}_r(z)$$

$$= -\hat{a}_y \frac{E_{ro}}{\eta_1} e^{i\beta_1 z}$$

(9)

Framferðarbylgja

$$\overline{E}_t(z) = \hat{a}_x E_{to} e^{-i\beta_2 z}$$

$$\overline{H}_t(z) = \hat{a}_z \times \frac{1}{\eta_2}\overline{E}_t(z)$$

$$= \hat{a}_y \frac{E_{to}}{\eta_2} e^{-i\beta_2 z}$$

Tvær óþekktar stærðir E_{ro} og E_{to}

Við skilflöt rafsvara verða $\overline{E}_\parallel$ og $\overline{H}_\parallel$ að vera samfelld

$$\overline{E}_i(0) + \overline{E}_r(0) = \overline{E}_t(0)$$

$$\longrightarrow E_{io} + E_{ro} = E_{to}$$

$$\overline{H}_i(0) + \overline{H}_r(0) = \overline{H}_t(0)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\eta_1}(E_{io} - E_{ro}) = \frac{E_{to}}{\eta_2}$$

Lausn gefur

$$E_{ro} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{io}$$

$$E_{to} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{io}$$

$$\boxed{\eta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}}}$$

(10)

Venja er að skilgreina speglunar og framferðar stuðla

$$\boxed{\Gamma = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad \tau = \frac{E_{to}}{E_{io}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}}$$

Hér má sjá mun þegar borið er saman við stammtapaði
Γ getur haft bæði formerki

Í kerfi með tapi verða þessir stuðlar tvinntölur → fasamunur

Greinilega gildir

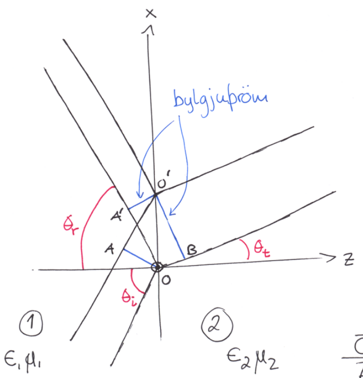
$$\boxed{1 + \Gamma = \tau}$$

Ef ② væri kjörleiðari $\eta_2 = 0$ fæst $\Gamma = -1$, $\tau = 0$

$E_{ro} = -E_{io}$, $E_{to} = 0$

1

Innfall undir horni á skilfleti rafsvara



Sami fasahraði í 1

↳ $\overline{OA'} = \overline{AO'}$

$\overline{OO'}\sin\theta_r = \overline{OO'}\sin\theta_i$

$\to \boxed{\theta_r = \theta_i}$

speglunarlögmál

Snells

Eins verður að gilda

$$\frac{\overline{OB}}{u_{p2}} = \frac{\overline{AO'}}{u_{p1}}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{AO'}} = \frac{u_{p2}}{u_{p1}} = \frac{\overline{OO'}\sin\theta_t}{\overline{OO'}\sin\theta_i}$$

2

því fæst

$$\boxed{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{u_{p2}}{u_{p1}} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

þar sem brotstuðlarnir hafa verið skilgreindir sem

$$n_i = c/u_{pi}$$

Lögmál Snells fyrir bylgjubrot

Nú var $u_{pi} = \frac{1}{\sqrt{\mu_i \epsilon_i}}$

því fæst

$$\boxed{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\eta_2}{\eta_1}}$$

fyrir efni með $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

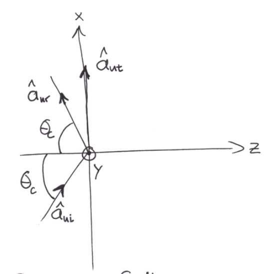
Ef í viðbót $\epsilon_{r1} = 1$, $n_1 = 1$ fæst

$$\boxed{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} = \frac{1}{n_2}}$$

3

Alspeglun

Setjum $\epsilon_1 > \epsilon_2$



$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$$

Þá kemur að því fyrir stórt $\theta_i = \theta_c$ að $\theta_t = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

fyrir enn stærri θ_i fer enginn geisli inn í 2 lengur

$$\boxed{\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$$

4

Í 2 gildir

$$\hat{a}_{nt} = \hat{a}_x \sin\theta_t + \hat{a}_z \cos\theta_t$$

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} > 1$$

$\sin\theta_i > \sin\theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$

$$\to \underbrace{\sin\theta_t}_{\text{rauntala}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}\sin\theta_i}_{\text{rauntala}} > 1$$

En engin rauntölulausn fyrir θ_t

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} = \pm i\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i - 1}$$

Bæði $\overline{E}_t$ og $\overline{H}_t$ hafa liðinn

$$e^{-i\beta_2 \hat{a}_{nt}\cdot\overline{R}} = e^{-i\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

þegar $\theta_i > \theta_c$ fæst

$$e^{-\alpha_2 z} e^{-i\beta_{2x} x}$$

með

$$\alpha_2 = \beta_2\sqrt{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)\sin^2\theta_i - 1}$$

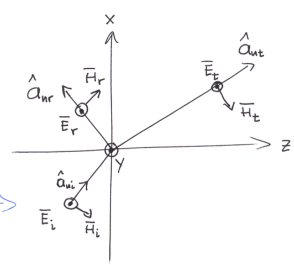
$$\beta_{2x} = \beta_2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}\sin\theta_i$$

Yfirborðsbylgja (föst í x-y fleti) og dofnandi í z-átt

$\boxed{\text{Evanescent}}$

Þver skautun

þvert á innfallssléttu



Inn

$$\overline{E}_i(x,z) = \hat{a}_y E_{i0} e^{-i\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\overline{H}_i(x,z) = \frac{E_{i0}}{\eta_1}(-\hat{a}_x\cos\theta_i + \hat{a}_z\sin\theta_i)\cdot e^{-i\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

Speglað

$$\overline{E}_r(x,z) = \hat{a}_y E_{r0} e^{-i\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

$$\overline{H}_r(x,z) = \frac{E_{r0}}{\eta_1}(\hat{a}_x\cos\theta_r + \hat{a}_z\sin\theta_r)\cdot e^{-i\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

Áfram

$$\overline{E}_t(x,z) = \hat{a}_y E_{t0} e^{-i\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

$$\overline{H}_t(x,z) = \frac{E_{t0}}{\eta_2}(-\hat{a}_x\cos\theta_t + \hat{a}_z\sin\theta_t) e^{-i\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

(5)

Fjórar óþekktar stærðir

E_{r0}, E_{t0}, θ_r, θ_t

Þættir $\overline{E}$ og $\overline{H}$ samsíða skilfletinum í $z=0$ eru samfelldir

$$E_{iy}(x,0) + E_{ry}(x,0) = E_{ty}(x,0)$$

$$\downarrow$$

$$E_{i0} e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i} + E_{r0} e^{-i\beta_1 x\sin\theta_r} = E_{t0} e^{-i\beta_2 x\sin\theta_t}$$

$$H_{ix}(x,0) + H_{rx}(x,0) = H_{tx}(x,0)$$

$$\frac{1}{\eta_1}\left(-E_{i0}\cos\theta_i e^{-i\beta_1 x\sin\theta_i} + E_{r0}\cos\theta_r e^{-i\beta_1 x\sin\theta_r}\right) = -\frac{E_{t0}}{\eta_2}\cos\theta_t e^{-i\beta_2 x\sin\theta_t}$$

verður að halda fyrir öll x

→ fasar verða að passa saman

$$\beta_1 x\sin\theta_i = \beta_1 x\sin\theta_r = \beta_2 x\sin\theta_t$$

↳ Lögmál Snells

$$\boxed{\theta_r = \theta_i \qquad \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

(6)

Þá verða jöfnurnar

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}$$

$$\frac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0})\cos\theta_i = \frac{E_{t0}}{\eta_2}\cos\theta_t$$

sem gefa

$$\Gamma_\perp = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\frac{\eta_2}{\cos\theta_t} - \frac{\eta_1}{\cos\theta_i}}{\frac{\eta_2}{\cos\theta_t} + \frac{\eta_1}{\cos\theta_i}}$$

$$\tau_\perp = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\frac{\eta_2}{\cos\theta_t}}{\frac{\eta_2}{\cos\theta_t} + \frac{\eta_1}{\cos\theta_i}}$$

Og eins og búast mátti við

$$\boxed{1 + \Gamma_\perp = \tau_\perp}$$

Héðan má sjá fyrri jöfnur með hornrétt-innfall þ.e. $\theta_t = 0$, $\theta_i = 0$

Ef ② er kjörleiðari verður $\eta_2 = 0$

$\Gamma_\perp = -1$, $\tau_\perp = 0$

engin framferð

(7)

Þegar

$$\Gamma_\perp = \frac{\frac{\eta_2}{\cos\theta_t} - \frac{\eta_1}{\cos\theta_i}}{\frac{\eta_2}{\cos\theta_t} + \frac{\eta_1}{\cos\theta_i}}$$

er skoðað má spyrja hvort til sé $\theta_i = \theta_{B\perp}$ (með η_1 og η_2) þ.a. $\Gamma_\perp = 0$

engin speglun

Þá þyrfti að gilda

$$\eta_2\cos\theta_{B\perp} = \eta_1\cos\theta_t$$

Snell gefur

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i}$$

$$\eta_2^2\cos^2\theta_{B\perp} = \eta_1^2\left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i\right)$$

$$\eta_2^2(1 - \sin^2\theta_{B\perp}) = \eta_1^2\left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i\right)$$

$$\eta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}}$$

Án taps $\beta_i = \frac{\omega}{\sqrt{\mu_i\epsilon_i}}$, $\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$

Því fæst

$$\boxed{\sin^2\theta_{B\perp} = \frac{1 - \frac{\mu_1\epsilon_2}{\mu_2\epsilon_1}}{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2}}$$

Brewster hornið fyrir enga speglun fyrir þverskautun

(8)

fyrir efni með $\mu_1=\mu_2=\mu_0$
(engin segulvirkni)
er hornið ekki til

fyrir samsíða skautun

fást jöfnurnar

$$\Gamma_\parallel = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i}$$

$$\tau_\parallel = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i}$$

Og

$$\boxed{1+\Gamma_\parallel = \tau_\parallel\left(\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\right)}$$

Sem er annars form en áður nema fyrir $\theta_i=\theta_t=0$

* Ef (2) er kjörleiðari fæst $\eta_2=0$ og aftur
$\Gamma_\parallel=-1$, $\tau_\parallel=0$

* Almennt er $|\Gamma_\perp|^2 > |\Gamma_\parallel|^2$ sem fall af θ_i, nema fyrir $\theta_i=0$

(9)

Slembi-skautuð bylgja sem falla á flöt undir horni leiðir til meira endurkasts þverskautaðs ljóss. ($\bar{E}$ liggur í sama fleti og skilflötunum)

leitum að $\theta_{B\parallel}$ (Brewster horni fyrir samsíða skautun)

$$\eta_2\cos\theta_t = \eta_1\cos\theta_{B\parallel}$$

Sem gefur núna

$$\boxed{\sin^2\theta_{B\parallel} = \frac{1-\frac{\mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_2}}{1-\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2}}$$

samanborið við

$$\boxed{\sin^2\theta_{B\perp} = \frac{1-\frac{\mu_1\epsilon_2}{\mu_2\epsilon_1}}{1-\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2}}$$

→ nú er alltaf til lausn f. $\mu_1=\mu_2$

$$\sin\theta_{B\parallel} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)}}$$

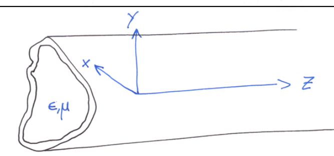
(10)

Vegna munsins á
$\theta_{B\perp}$ og $\theta_{B\parallel}$
er hægt að aðgreina
skautunarstefnur.

Því er oft talað
um skautunarhorn

(11)

Bylgjuleiðarar



liggur í z-átt með
föstum þverskurð

Bylgja berst í z-stefnu með
bylgjufasta $\gamma=\alpha+i\beta = (ik_c)$

því búumst við við þætti
$$e^{-\gamma z + i\omega t} = e^{-\alpha z + i(\omega t - \beta z)}$$
í sviðunum

Tímaháða rafsviðið er því

(*) $\bar{E}(x,y,z,t) = \Re\left[\bar{E}^0(x,y)\,e^{i\omega t-\gamma z}\right]$

háð x og y

Engar hleðslur og straumar
í leiðarahólfinu

⇓

$$(\nabla^2+k^2)\bar{E}=0$$

$$(\nabla^2+k^2)\bar{H}=0$$

með $k=\omega\sqrt{\mu\epsilon}$

(1)

2

Vegna útlits $\bar E$ og $\bar H$ (*)

$$\nabla^2 \bar E = (\nabla_{xy}^2 + \nabla_z^2)\bar E = \left(\nabla_{xy}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\bar E = (\nabla_{xy}^2 + \gamma^2)\bar E$$

Helmholtz jöfnurnar verða því

$$\left\{\nabla_{xy}^2 + (\gamma^2 + k^2)\right\}\bar E = 0$$

$$\left\{\nabla_{xy}^2 + (\gamma^2 + k^2)\right\}\bar H = 0$$

En $\bar E$ og $\bar H$ tengjast líka í gegnum jöfnur Maxwells

$$\nabla \times \bar E = -i\omega\mu \bar H$$

$$\nabla \times \bar H = i\omega\epsilon \bar E$$

$$\downarrow$$

$$H_x^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma \frac{\partial H_z^0}{\partial x} - i\omega\epsilon \frac{\partial E_z^0}{\partial y}\right)$$

$$H_y^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma \frac{\partial H_z^0}{\partial y} + i\omega\epsilon \frac{\partial E_z^0}{\partial x}\right) \qquad (**)$$

$$E_x^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma \frac{\partial E_z^0}{\partial x} + i\omega\mu \frac{\partial H_z^0}{\partial y}\right)$$

$$E_y^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma \frac{\partial E_z^0}{\partial y} - i\omega\mu \frac{\partial H_z^0}{\partial x}\right)$$

$$h^2 = \gamma^2 + k^2$$

3

* Því nægir að leysa jöfnur Helmholtz fyrir E_z^0 og H_z^0 síðan ákvarðast hinir þættirnir frá jöfnum Maxwells (**)

Flokkum bylgjur

TEM: $E_z, H_z = 0$

TM: $H_z = 0$

TE: $E_z = 0$

TEM

$E_z = 0$ og $H_z = 0$

(**) → aðeins mögulegar lausnir ef $\gamma_{TEM}^2 + k^2 = 0$

$\to \gamma_{TEM} = ik = i\omega\sqrt{\mu\epsilon}$

$\to u_{p(TEM)} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ fasahraði TEM-bylgju óháður ω

Jöfnur Maxwells gefa

$$Z_{TEM} = \frac{E_x^0}{H_y^0} = \frac{\gamma_{TEM}}{i\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta$$

$$\bar H = \frac{1}{Z_{TEM}} \hat a_z \times \bar E$$

samviðnám

4

Ampère Maxwell lögmálið krefst þess að línuheildi $\bar H$ um lokaðar sviðslínurnar í xy-sléttunni sé jafnt straumnum og færslustraumnum í gegnum þær í z-átt

Ekki til hér í holinu

→ TEM-bylgja er ekki til í holinu

TM-bylgjur

$H_z = 0$

→ nægir að reikna E_z

$$(\nabla_{xy}^2 + h^2)E_z^0 = 0 \qquad (1)$$

Maxwell jöfnurnar fyrir hina þættina má einfalda sem

$$\boxed{(E_T^0)_{TM} = -\frac{\gamma}{h^2}\nabla_T E_z^0}$$

með

$$\nabla_T E_z^0 = \left(\hat a_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat a_y \frac{\partial}{\partial y}\right)E_z^0$$

5

og

$$\boxed{\bar H = \frac{1}{Z_{TM}}(\hat a_z \times \bar E)}$$

ef

$$\boxed{Z_{TM} = \frac{E_x^0}{H_y^0} = -\frac{E_y^0}{H_x^0} = \frac{\gamma}{i\omega\epsilon}}$$

Hér er (1) eigingildisjafna fyrir E_z^0 og h^2 eru stjál eigingildi sem við finnum þegar jafnan (1) er leyst fyrir bæði þverskurðarform sem við höfum áhuga á

Þegar eigingildin eru fundin má reikna

$$\gamma = \sqrt{h^2 - k^2} = \sqrt{h^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

Til er þröskuldstíðni

$$\omega_c = \frac{h}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

eða

$$\boxed{f_c = \frac{h}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}}$$

þegar $\gamma = 0$

$$\gamma = h\sqrt{1 - \frac{\omega^2\mu\epsilon}{h^2}} = h\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

$f < f_c$

$\rightarrow \gamma \in \mathbb{R}$

burðarþátturinn er

$$e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z}$$

Engin bylgja berst

$\rightarrow$ Dofnunarástand

$$\gamma = \alpha = h\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

$\rightarrow$ f_c er þröskuldstíðni

$f > f_c$

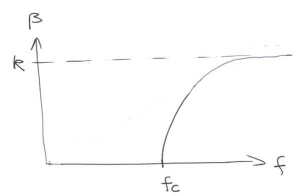
$$\gamma = i\beta = ik\sqrt{1 - \left(\frac{h}{k}\right)^2}$$

$$= ik\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

því $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

Bylgja berst með

$$\beta = k\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$



(6)

Bylgjulengd í leiðara

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k}\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} > \lambda$$

því $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{u}{f}$

og $u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

Með þröskulds bylgjulengdinni

$$\lambda_c = \frac{u}{f_c}$$

má fá

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}$$

Grúpuhraði

$$u_g = \frac{1}{d\beta/d\omega} = u\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda_g} u < u$$

Fasahraði

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda_g}{\lambda} u > u$$

$$\hookrightarrow \boxed{u_g u_p = u^2}$$

Bylgjur tvístrast í þessum leiðara

(7)

$$Z_{TM} = \frac{\gamma}{i\omega\epsilon}$$

$$= \eta\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

En fyrir $f < f_c$

fékkst

$$Z_{TM} = -i\frac{h}{\omega\epsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

TE-bylgjur

$$E_z = 0$$

Nú er eigingildisjafnan

$$\boxed{\nabla_{xy}^2 H_z + h^2 H_z = 0}$$

Maxwell gefur

$$\boxed{(H_T^0)_{TE} = -\frac{\gamma}{h^2}\overline{\nabla}_T H_z^0}$$

og

$$\boxed{\overline{E} = -Z_{TE}(\hat{a}_z \times \overline{H})}$$

með

$$\boxed{Z_{TE} = \frac{i\omega\mu}{\gamma}}$$

(8)

fyrir $f > f_c$

fæst aftur

$$\gamma = ik\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = i\beta$$

bylgjulausn með

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}$$

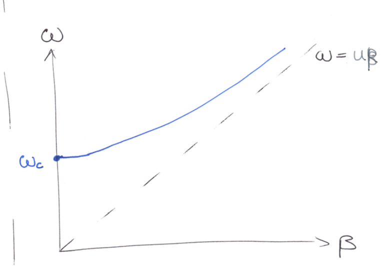
fyrir $f < f_c$

$$\gamma = \alpha = h\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

Dofnunarlausn með

$$Z_{TE} = i\frac{\omega\mu}{h\sqrt{1 - (f/f_c)^2}}$$

Tvístrurit



$$\beta = k\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{u^2}$$

$$\hookrightarrow \omega^2 = \omega_c^2 + \beta^2 u^2$$

$$\omega = \sqrt{\omega_c^2 + \beta^2 u^2}$$

(9)

TM bylgjur milli samsíða leiðara

(0)

$H_z = 0$

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + h^2\right) E_z^0(y) = 0$$

Jaðarskilyrði

$$E_z^0(0) = 0 \,,\quad E_z(b) = 0$$

$$E_z^0(y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

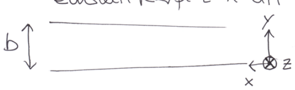
Maxwell gefur

$$H_x^0(y) = \frac{i\omega\epsilon}{h} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$E_y^0(y) = -\frac{\gamma}{h} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \qquad h = \frac{n\pi}{b}$$

einsleitt kerfi í x-átt



með þröskuldstíðni

$$f_c = \frac{n}{2b\sqrt{\mu\epsilon}}$$

TM_0 er TEM háttur ($f_c = 0$) og ríkjandi háttur

lægsti þröskuldur

TE-bylgjur milli samsíða platna

(1)

$E_z = 0$, x-samhverfa (forsenda)

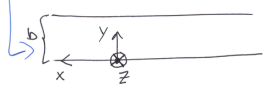
$$\hookrightarrow \left(\frac{d^2}{dy^2} + h^2\right) H_z^0(y) = 0$$

$$H_z(y,z) = H_z^0(y)\, e^{-\gamma z}$$

$E_x = 0$ á plötunum

Maxwell gaf

$$E_x^0 = -\frac{i\omega\mu}{h^2}\frac{\partial H_z^0}{\partial y}$$



$$\frac{dH_z^0(y)}{dy} = 0 \quad \text{fyrir } y = 0, b$$

$$H_z^0(y) = B_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Aðrir þættir eru (Maxwell)

$$H_y^0(y) = \frac{\gamma}{h} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$E_x^0(y) = \frac{i\omega\mu}{h} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

↑ Eins og fyrir TM

Orkuflutningshraði

(2)

Vegna þröskulda í tíðni er ekki víst að grúpuhraði sé vel skilgreindur fyrir bylgjuleiðara

→ orkuflutningshraði

$$u_{en} = \frac{(P_z)_{ave}}{W'_{ave}}$$

með

$$(P_z)_{ave} = \int_S \bar{\mathcal{P}}_{ave} \cdot d\bar{s}$$

Meðaltalsaflið í þversniði S

og

$$W'_{ave} = \int_S \left[(w_e)_{ave} + (w_m)_{ave}\right] ds$$

meðal orkan geymd í lengdareiningu leiðara

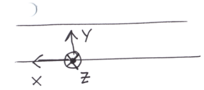
↑ Einingar eru þá réttar fyrir u_{en}

Meðaltal m.t.t. tíma

Dæmi

(3)

Reiknum u_{en} fyrir TM_n



$$E_z^0(y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$H_x^0(y) = \frac{i\omega\epsilon}{h} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$E_y^0(y) = -\frac{\gamma}{h} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \,,\quad \gamma = i\beta$$

$$\bar{\mathcal{P}}_{ave} = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left(\bar{E} \times \bar{H}^*\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left(-\hat{a}_z E_y^0 H_x^{0*} + \hat{a}_y E_z^0 H_x^{0*}\right)$$

$$\rightarrow \bar{\mathcal{P}}_{ave} \cdot \hat{a}_z = -\frac{1}{2}\mathcal{R}e\left(E_y^0 H_x^{0*}\right)$$

$$= \frac{\omega\epsilon\beta}{2h^2} A_n^2 \cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$(P_z)_{ave} = \int_0^b \bar{\mathcal{P}} \cdot \hat{a}_z \, dy$$

$$= \frac{\omega\epsilon\beta b}{4h^2} A_n^2$$

á einingarbreidd leiðara (x-stefna)

$$(w_e)_{ave} = \frac{\epsilon}{4}\,\Re\,(\bar E \cdot \bar E^*)$$

$$(w_m)_{ave} = \frac{\mu}{4}\,\Re\,(\bar H \cdot \bar H^*)$$

$$(w_e)_{ave} = \frac{\epsilon}{4} A_n^2 \left\{ \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \frac{\beta^2}{h^2}\cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right\}$$

$$\rightarrow \int_0^b (w_e)_{ave}\,dy = \frac{\epsilon b}{8} A_n^2 \left\{ 1 + \frac{\beta^2}{h^2} \right\}$$

$$= \frac{\epsilon b}{8h^2} A_n^2 \left\{ h^2 + \beta^2 \right\} = \frac{\epsilon b}{8h^2} k^2 A_n^2$$

og eins fyrir segulsviðið

$$\int_0^b (w_m)_{ave}\,dy = \frac{\epsilon b}{8h^2} k^2 A_n^2$$

Því fæst

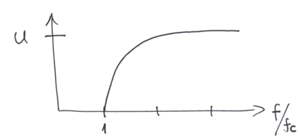
$$u_{en} = \frac{\frac{\omega\epsilon\beta b}{4h^2} A_n^2}{\frac{\epsilon b}{4h^2} k^2 A_n^2} = \frac{\omega\beta}{k^2}$$

$$= \frac{\omega}{k} \cdot \frac{\beta}{k}$$

$$= \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \frac{k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}{k}$$

$$= u\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$= u_g$$



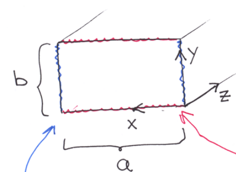
4

Rétthyrndur bylgjuleiðari

TM-bylgjur $H_z = 0$ $\quad E_z(x,y,z) = E_z^0(x,y)e^{-\gamma z}$

með

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h^2\right) E_z^0(x,y) = 0$$



Lögunum beitir aðgreiningu breytistærða

$$E_z^0(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

Þá fæst

$$X''(x) + k_x^2 X(x) = 0$$
$$Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0$$

með $k_y^2 + k_x^2 = h^2$

Jaðargildi

$E_z^0(0,y) = 0$ $\quad E_z^0(x,0) = 0$

$E_z^0(a,y) = 0$ $\quad E_z^0(x,b) = 0$

5

Einu lausnirnar fyrir X og Y verða $\quad \sin k_x x\,,\ \sin k_y y$

með

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \cdots$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$\rightarrow \boxed{E_z^0(x,y) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y)}$$

og

$$\boxed{h^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$\gamma = i\beta = i\sqrt{k^2 - h^2}$$
$$= i\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Til viðbótar fæst

$$E_x^0(x,y) = -\frac{\gamma}{h^2} k_x E_0 \cos(k_x x)\sin(k_y y)$$

$$E_y^0(x,y) = -\frac{\gamma}{h^2} k_y E_0 \sin(k_x x)\cos(k_y y)$$

$$H_x^0(x,y) = \frac{i\omega\epsilon}{h^2} k_y E_0 \sin(k_x x)\cos(k_y y)$$

$$H_y^0(x,y) = -\frac{i\omega\epsilon}{h^2} k_x E_0 \cos(k_x x)\sin(k_y y)$$

$$(f_c)_{mn} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

$$(\lambda_c)_{mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

6

Lesa sjálf um TE í rétthyrndum leiðara

Þar kemur í ljós að TE_{10} er ríkjandi háttur í rétthyrndum leiðurum ef $a > b$

Hringlaga bylgjustokkar

Hnitakerfið er sívalningshnit

$$\bar E = \bar E_T + \hat a_z E_z$$
$$\bar H = \bar H_T + \hat a_z H_z$$

þverþættir

TEM-bylgjur eru ekki til í þeim

→ TE og TM-bylgjur

$$\nabla^2_{r\phi} E_z^0 + (\gamma^2 + k^2) E_z^0 = 0$$

$$E_z = E_z^0 e^{-\gamma z}$$

$$E_z(r,\phi,z) = E_z^0(r,\phi)e^{-\gamma z}$$

Lausnir

$$\boxed{E_z^0(r,\phi) = C_n J_n(hr)\cos(n\phi)}$$

Bessel fall

7

$$(E_T^o)_{TM} = \hat{a}_r E_r^o + \hat{a}_\phi E_\phi^o = -\frac{\gamma}{h^2}\overline{\nabla}_T E_z^o$$

$$= -\frac{\gamma}{h^2}\left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\phi \frac{\partial}{r\partial\phi}\right) E_z^o$$

$$\rightarrow \quad E_r^o = -\frac{i\beta}{h} C_n J_n'(hr)\cos(n\phi)$$

$$E_\phi^o = \frac{i\beta n}{h^2 r} C_n J_n(hr)\sin(n\phi)$$

$$H_r^o = -\frac{i\omega\epsilon n}{h^2 r} C_n J_n(hr)\sin(n\phi)$$

$$H_\phi^o = -\frac{i\omega\epsilon}{h} C_n J_n'(hr)\cos(n\phi)$$

$$H_z^o = 0$$

Eigingildi TM háttanna finnast frá

$$\boxed{J_n(ha) = 0}$$

því $E_z^o(a,\phi) = 0$

Gildin á mögulegum „h" ákvarðast frá núllstöðum J_n

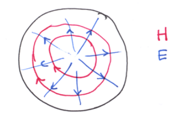
Lægsta núllstöðin er fyrir $J_0 \rightarrow$ TM01-háttur er lægstur hér

Lesa sjálf um TE-bylgjur í sívalningsbylgjustokki

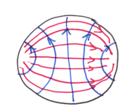
Þar kemur í ljós að $J_n'(ha) = 0$ hefur lægstu rót fyrir $n=1$

$\rightarrow$ TE_{11} er lægsti hátturinn

og er ríkjandi háttur í hringlaga leiðurum



TM_{01}



TE_{11}

Bessel föll

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0$$

Lausnir eru líka til fyrir raungild ν og jafnvel tvinngild.

hefur lausnir

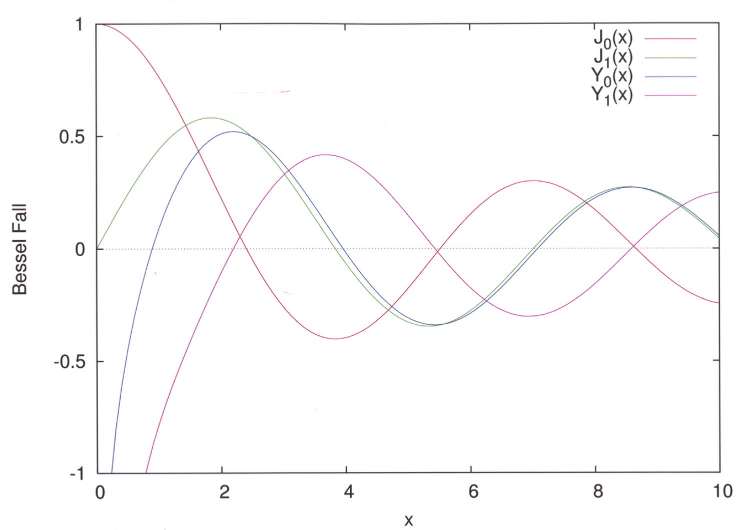
$$u = A_n J_n(z) + B Y_n(z)$$

sérstöðup. í $z=0$

fyrir $\nu = n = 0, 1, 2, \ldots$

$$J_n'(z) = \frac{1}{2}\left\{J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\right\} \quad n = 1, 2, \ldots \qquad J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}J_n(z)$$

$$J_0'(z) = -J_1(z)$$



Geislun og loftnet

Leiðarar með tímaháðum straumum og hleðslum mynda rafsegulsvið.

fyrir tímabundnar uppsprettur höfum við leitt út (í fasorataknum)

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\bar{J}e^{-ikR}}{R}\,dv'$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \rho\frac{e^{-ikR}}{R}\,dv'$$

$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$

frá $\bar{A}$ og V má síðan finna

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu}\bar{\nabla}\times\bar{A}$$

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}V - i\omega\bar{A}$$

flæðir orka út í óendanleikann?

Við þurfum að skoða lausnirnar nærri og fjarri uppsprettum til þess að finna hvort rafsegulsvið berist frá þeim

Getum okkur $\bar{J}$ ~~og/eða~~ ρ og reiknum $\bar{A}$ ~~og/eða~~ V. Fyrsta nálgun því $\bar{A}$ og $\bar{V}$ verða lík á $\bar{J}$ og ρ. Þarf að leysast sjálfsamkvæmt

$\bar{A}$ og V tengjast í gegnum Lorentz Skilyrðin og ρ og $\bar{J}$ í gegnum samfelldnijöfnuna

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = -i\omega\rho$$

Eins tengjast $\bar{E}$ og $\bar{H}$

$$\bar{E} = \frac{1}{i\omega\epsilon}\bar{\nabla}\times\bar{H}$$

Við veljum

1. Reiknum $\bar{A} \leftarrow \bar{J}$
2. $\bar{A} \rightarrow \bar{H}$
3. $\bar{H} \rightarrow \bar{E}$

Einnig má reyna

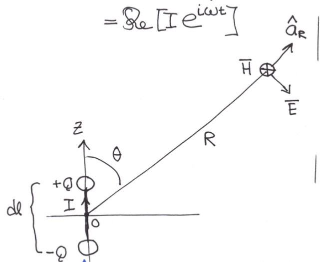
1. $\bar{A} \leftarrow \bar{J} \qquad V \leftarrow \rho$
2. $\bar{A}, V \rightarrow \bar{E}$
3. $\bar{A} \rightarrow \bar{H}$ (eða $\bar{E} \rightarrow \bar{H}$)

fyrri leiðin er einfaldari í flestum tilfellum.

Raftvískaut

Ef straumurinn er

$i(t) = I\cos(\omega t)$
$= \mathrm{Re}[Ie^{i\omega t}]$



Kúla dísbur
Ryndar álag

Hleðsla getur safnast á endunum

$$i(t) = \pm\frac{dq(t)}{dt}$$

$$q(t) = \mathrm{Re}[Qe^{i\omega t}]$$

fyrir fasorana fæst þá

$$I = \pm i\omega Q$$

eða

$$Q = \pm\frac{I}{i\omega}$$

Leiðir til tvískautvægis

$$\bar{p} = \hat{a}_z Q\,dl$$

fasorataknum

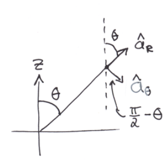
Tvískaut Hertz

$$\bar{A} = \hat{a}_z\frac{\mu_0 I\,dl}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)$$

þar sem $\beta = k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Viljum nota kúluhnit

$$\hat{a}_z = \hat{a}_R\cos\theta - \hat{a}_\theta\sin\theta$$



$$A_R = A_z\cos\theta = \frac{\mu_0 I\,dl}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)\cos\theta$$

$$A_\theta = -A_z\sin\theta = -\frac{\mu_0 I\,dl}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)\sin\theta$$

$$A_\phi = 0$$

$\bar{A}$ er ekki fall af ϕ því fæst

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0}\bar{\nabla}\times\bar{A} = \hat{a}_\phi\frac{1}{\mu_0 R}\left\{\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial\theta}\right\}$$

$$= -\hat{a}_\phi\frac{I\,dl}{4\pi}\beta^2\sin\theta\left\{\frac{1}{i\beta R} + \frac{1}{(i\beta R)^2}\right\}e^{-i\beta R}$$

5

og fyrir rafsviðið

$$\bar{E} = \frac{1}{i\omega\epsilon_0}\nabla\times\bar{H}$$

$$= \frac{1}{i\omega\epsilon_0}\left\{\hat{a}_R \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\phi \sin\theta) - \hat{a}_\theta \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RH_\phi)\right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_R = -\frac{Idl}{4\pi}\eta_0\beta^2 2\cos\theta\left\{\frac{1}{(i\beta R)^2}+\frac{1}{(i\beta R)^3}\right\}e^{-i\beta R} \\ E_\theta = -\frac{Idl}{4\pi}\eta_0\beta^2 \sin\theta\left\{\frac{1}{i\beta R}+\frac{1}{(i\beta R)^2}+\frac{1}{(i\beta R)^3}\right\}e^{-i\beta R} \\ E_\phi = 0 \end{cases}$$

6

Nærsvið

$$\beta R = \frac{2\pi R}{\lambda} \ll 1$$

$$\rightarrow H_\phi \rightarrow \frac{Idl}{4\pi R^2}\sin\theta$$

sama formlega útlit og fyrir segulstöðusviðið
(við erum þó hér með fasora)

því $e^{-i\beta R} \rightarrow 1$

fyrir rafsviðið fæst

$$E_R = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3}2\cos\theta$$

Aftur sama útlit og fyrir rafstöðusvið tvískauts

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3}\sin\theta$$

7

Fjærsvið

$$\beta R = 2\pi R/\lambda \gg 1 \qquad \left(R \gg \frac{\lambda}{2\pi}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} H_\phi &\rightarrow i\frac{Idl}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)\beta\sin\theta \\ E_\theta &\rightarrow i\frac{Idl}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)\eta_0\beta\sin\theta \end{aligned}}$$

Misleit kúlubylgja á leið út frá tvípól. Á smáum fleti hefur hún eiginleika sléttrar bylgju í tómarúmi

Sviðin eru í tímafasa, $\frac{E_\theta}{H_\phi} = \eta_0$

$\frac{1}{R}$-hegðun leiðir til þess að orkuflæðið í gegnum kúluflöt með geisla $R \rightarrow \infty$ hverfur ekki

Hér sést ekkert eftir að nærsviðs-eiginleikunum

8

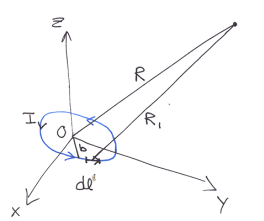
Segultvískaut

$i(t) = I\cos(\omega t)$

↓

Segultvískautsvægi

$$\bar{m} = \hat{a}_z I\pi b^2 = \hat{a}_z m$$



$$\bar{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{e^{-i\beta R_1}}{R_1}d\bar{l}'$$

Nálgun fyrir smáan hring

$$e^{-i\beta R_1} = e^{-i\beta R - i\beta(R_1 - R)}$$

$$\approx e^{-i\beta R}\left\{1 - i\beta(R_1-R) + \cdots\right\}$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}e^{-i\beta R}\left\{(1+i\beta R)\oint\frac{d\bar{l}'}{R_1} - i\beta\underbrace{\oint d\bar{l}'}_{=0}\right\}$$

9

þvi fæst

$$\bar{A} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 m}{4\pi R^2}(1 + i\beta R)e^{-i\beta R}\sin\theta$$

og því

$$E_\phi = \frac{i\omega\mu_0 m}{4\pi}\beta^2 \sin\theta\left\{\frac{1}{i\beta R} + \frac{1}{(i\beta R)^2}\right\}e^{-i\beta R}$$

$$H_R = -\frac{i\omega\mu_0 m}{4\pi\eta_0}\beta^2 2\cos\theta\left\{\frac{1}{(i\beta R)^2} + \frac{1}{(i\beta R)^3}\right\}e^{-i\beta R}$$

$$H_\theta = -\frac{i\omega\mu_0 m}{4\pi\eta_0}\beta^2 \sin\theta\left\{\frac{1}{i\beta R} + \frac{1}{(i\beta R)^2} + \frac{1}{(i\beta R)^3}\right\}e^{-i\beta R}$$

10

Tvískautin eru lík

$$E_e \leftrightarrow \eta_0 H_m \qquad H_e \leftrightarrow -\frac{E_m}{\eta_0} \qquad \text{Ef} \quad I d\ell \leftrightarrow i\beta m$$

fjarsviðin eru

$$E_\phi = \frac{\omega\mu_0 m}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)\beta\sin\theta$$

$$H_\theta = -\frac{\omega\mu_0 m}{4\pi\eta_0}\left(\frac{e^{-i\beta R}}{R}\right)\beta\sin\theta$$

því gildir allt sem sagt hér líka

$\boxed{\text{Tvískautin geisla rafsegulsviði}}$

1

Geislunar mynstur - stikar

Hertz-tvískauts geislun fjarsvið

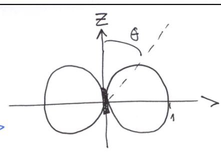
$$E_\theta \sim \eta_0 \frac{e^{-i\beta R}}{R}\sin\theta$$

$$H_\phi \sim \frac{e^{-i\beta R}}{R}\sin\theta$$

$E_\theta \sim H_\phi$, óháð ϕ

(E-plane): gefið R

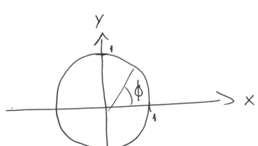
normað $|E_\theta| = |\sin\theta|$



Lítil geislun í z-átt samsíða tvískautsvægi $\bar{P}$

(H-plane): Gefið R, $\theta = \pi/2$

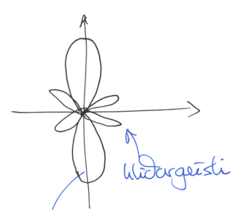
$E_\theta = |\sin\theta| = 1$



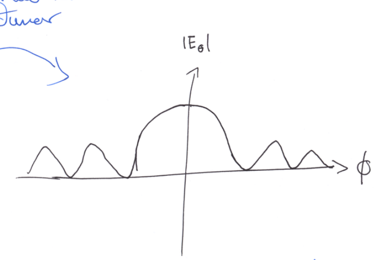
Jöfn geislun í x-y-sléttu

2

Sum loftnet geta haft mynstur í x-y-sléttu



Önnur leið til skoðunar



þá má skoða geislabreidd og styrk hliðargeisla

3

Geislunarstyrkur, U

Er mældur í W/sr — rúmhorn, heil kúla er 4π (sr)

$$U = R^2 \mathcal{S}_{ave}$$

og heildarafl geislað

$$P_r = \oint \mathcal{S}_{ave} \cdot d\vec{s} = \oint U \, d\Omega$$

$$(d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi)$$

Stefnumögnun er mæld með

$$\boxed{G_D(\theta,\phi) = 4\pi \frac{U(\theta,\phi)}{P_r}}$$

$$= \frac{4\pi U(\Omega)}{\oint U \, d\Omega}$$

Max stefnumögnunin er áttun (directivity)

$$\boxed{D = \frac{4\pi U_{max}}{P_r}}$$

Geislaða aflið

sem má skrifa sem

$$D = \frac{4\pi |E_{max}|^2}{\int |E(\Omega)|^2 d\Omega}$$

4

Í loftnetinu og umhverfinu (jörðinni) verður alltaf óæskt afltap P_ℓ

Heildar inn-aflið er því $P_i = P_r + P_\ell$

og aflmögnun loftnets er

$$\boxed{G_P = \frac{4\pi U_{max}}{P_i}}$$

Geislunarnýtni er skilgreind

$$\boxed{\eta_r = \frac{G_P}{D} = \frac{P_r}{P_i}}$$

Geislunarviðnám er gildi þess óæskta viðnáms sem eyðir jafnmiklu afli í hita og loftnetið í geislun P_r

$\Downarrow$

hátt geislunarviðnám er hagkvæmt

5

Könnum þessa stika með dæmi

Hertz-tvískaut

$$H_\phi = i \frac{Idl}{4\pi} \left(\frac{e^{-i\beta R}}{R} \right) \beta \sin\theta$$

$$E_\theta = i \frac{Idl}{4\pi} \left(\frac{e^{-i\beta R}}{R} \right) \eta_0 \beta \sin\theta$$

$$\mathcal{S}_{ave} = \frac{1}{2} \mathrm{Re} |\vec{E} \times \vec{H}^*| = \frac{1}{2} |E_\theta| |H_\phi|$$

$$U = R^2 \mathcal{S}_{ave} = \frac{(Idl)^2}{32\pi^2} \eta_0 \beta^2 \sin^2\theta$$

$$P_r = \oint U(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi U(\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$P_r = 2\pi \frac{(Idl)^2}{32\pi^2} \eta_0 \beta^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta}_{\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right)\Big|_0^\pi}$$

$$= -\frac{1}{3} + 1$$
$$-\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$P_r = \frac{(Idl)^2}{12\pi} \eta_0 \beta^2$$

$$G_D(\Omega) = \frac{U(\Omega) 4\pi}{P_r}$$

$$= \frac{(Idl)^2 \eta_0 \beta^2 \sin^2\theta \; 12\pi}{8\pi \; (Idl)^2 \eta_0 \beta^2}$$

$$= \frac{3}{2} \sin^2\theta$$

6

$$G_D(\Omega) = \frac{3}{2} \sin^2\theta$$

Mest geislun í x-y-sléttu og engin í póláttirnar tvær $\pm \hat{z}$

$$D = G_D\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) = 1.5$$

$$P_r = \frac{(Idl)^2}{12\pi} \eta_0 \beta^2$$

notum (8-14) með

$$\eta_0 \simeq 120\pi$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$P_r = \frac{I^2}{2} \left\{ 80\pi^2 \left(\frac{dl}{\lambda} \right)^2 \right\}$$

til þess að finna geislunarviðnám notum við

$$P_r = \frac{1}{2} I^2 R_r$$

$$\rightarrow \boxed{R_r = 80\pi \left(\frac{dl}{\lambda} \right)^2}$$

Hér þarf að muna að svörin okkar eru aðeins rétt reiknuð fyrir $dl \ll \lambda$

$\downarrow$

fékkst lágt gildi fyrir R_r

7

Skoðum vírbút með leiðni σ
geisla a, lengd d sem Hertz-tvístaut

Ómskt tap $P_\ell = \frac{1}{2} I^2 R_\ell$

R_ℓ verður að tengja við yfirborðsviðnám R_s

$R_\ell = R_s\left(\frac{d}{2\pi a}\right)$ þ.s. $R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}}$ ← frá flutningslínunum sem við höfum sleppt

$$\eta_r = \frac{P_r}{P_r + P_\ell} = \frac{R_r}{R_r + R_\ell} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_\ell}{R_r}\right)}$$

$$\rightarrow \eta_r = \frac{1}{1 + \frac{R_s}{160\pi^3}\left(\frac{\lambda}{a}\right)\left(\frac{\lambda}{d}\right)}$$

8

Ef nú $a = 1{,}8$ mm, $d = 2$m, $f = 1.5$ MHz

$\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m fyrir kopar fæst $\lambda = 200$ m

og $\eta_r = 0.58 \rightarrow$ 58% nýtni

Jafnan

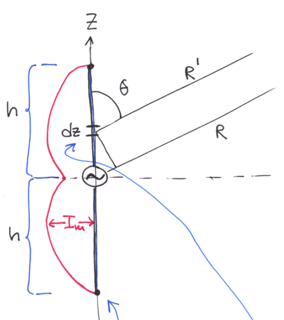
$$\eta_r = \frac{1}{1 + \frac{R_s}{160\pi^3}\left(\frac{\lambda}{a}\right)\left(\frac{\lambda}{d}\right)}$$

sýnir að lág gildi fyrir $\left(\frac{a}{\lambda}\right)$ og $\left(\frac{d}{\lambda}\right)$ lækka nýtnina (En jöfnurnar gilda aðeins í þessu markgildi)

Því þurfum við að skoða loftnet með lengd sambærilega við bylgjulengdina λ

9

Grönn lína



Straumurinn verður að hverfa í endunum

Sleppum því að ákvarða strauminn sjálfsamkvæmt og gerum ráð fyrir

$$I(z) = I_m \sin\{\beta(h - |z|)\}$$
$$= \begin{cases} I_m \sin\{\beta(h-z)\} & z > 0 \\ I_m \sin\{\beta(h+z)\} & z < 0 \end{cases}$$

Við látum okkur nægja að kanna fjær-sviðin

$$dE_\theta = \eta_0 dH_\phi = i \frac{I dz}{4\pi}\left(\frac{e^{-i\beta R'}}{R'}\right)\eta_0 \beta \sin\theta$$

fyrir litla búta loftnetsins dz

10

Mjög fjarri loftnetinu $R \gg h$

$$R' = \left(R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta\right)^{1/2} \simeq R - z\cos\theta, \quad \frac{1}{R} \sim \frac{1}{R'}$$

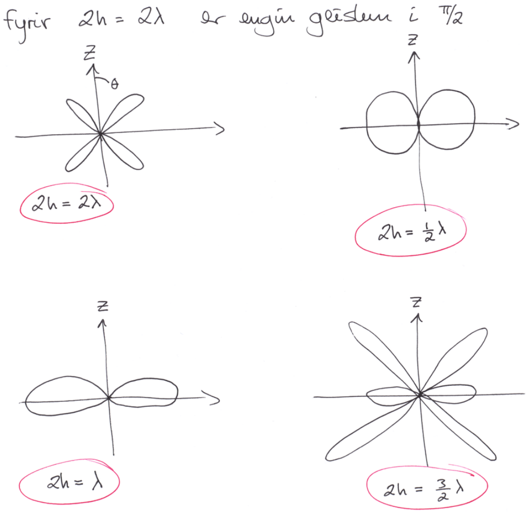
$$E_\theta = \eta_0 H_\phi = i \frac{I_m \eta_0 \beta \sin\theta}{4\pi R} e^{-i\beta R} \int_{-h}^{h} \sin\{\beta(h - |z|)\} e^{i\beta z \cos\theta} dz$$

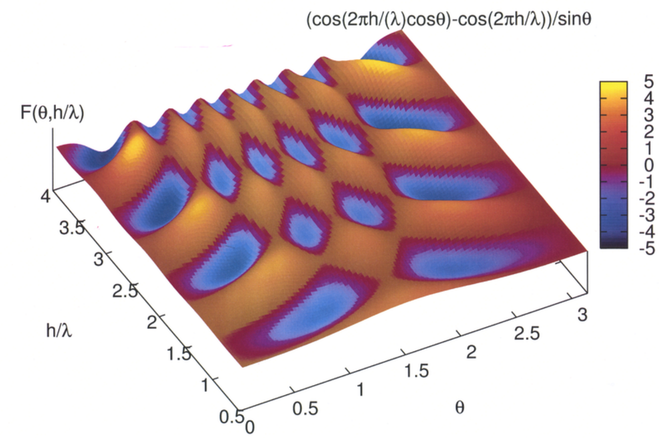
$$= i \frac{60 I_m}{R} e^{-i\beta R} F(\theta)$$

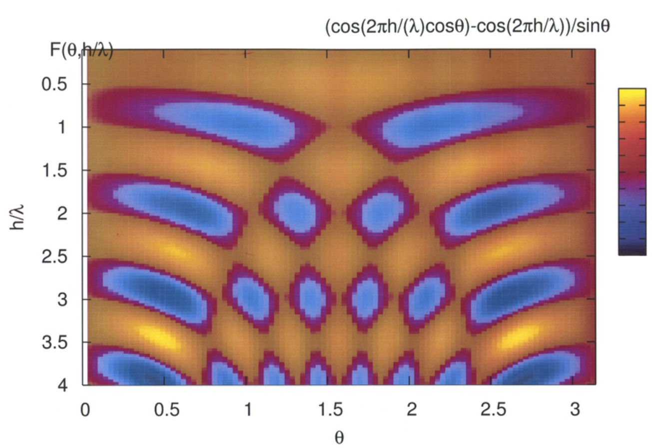
með

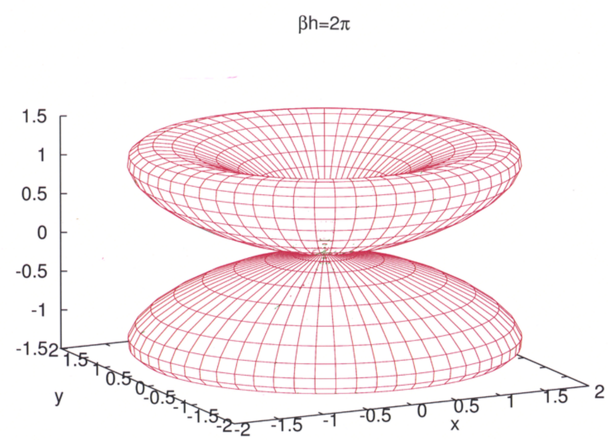
$$F(\theta) = \frac{\cos\{\beta h \cos\theta\} - \cos(\beta h)}{\sin\theta}$$ ← lengd loftnetsins skiptir öllu máli hér

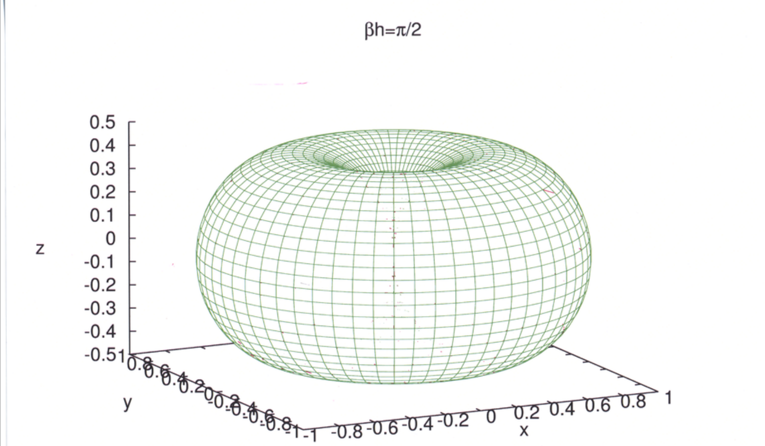
E-plane mynsturfallið fyrir þetta loftnet fyrir $2h = 2\lambda$ er engin geislun í $\pi/2$

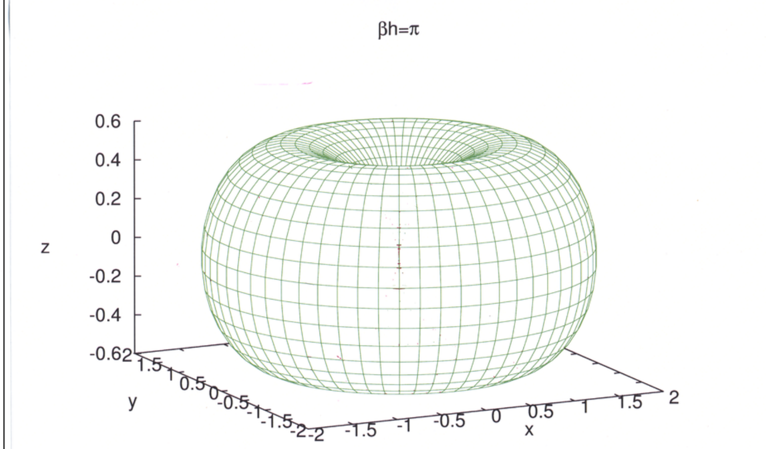


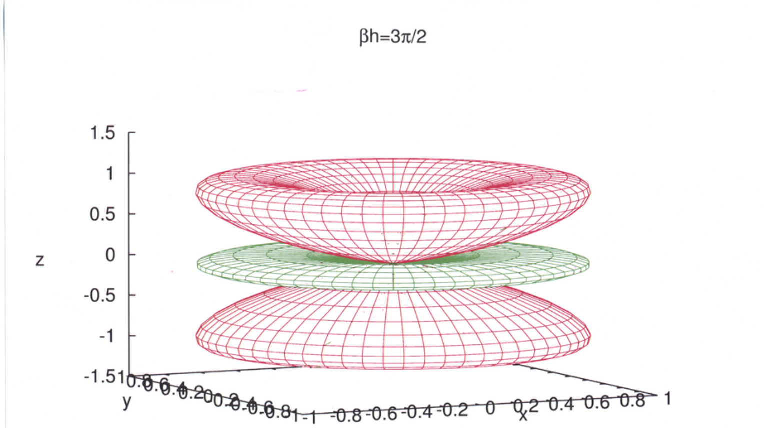












Rafsegulgeislun

Við höfum skoðað geislun frá loftnetum

En viljum nú nálgast lýsingu á geislun einda á hreyfingu

Þetta fyrsta skref er tekið fyrir gildi á öllum viðkomandi stikum sem ekki krefjast beint afstæðiskenningar.

Fyrir geislunarmætti höfðum við

$$V(R,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\rho(t - R/u)}{R}\, dv'$$

$$\bar{A}(R,t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\bar{J}(t - R/u)}{R}\, dv'$$

Hér að gæta sín á merking R utan og innan heildis

↓

Endurritum jöfnurnar sem

(2)

$$V(\bar{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int d\bar{r}' \, \frac{\rho\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{u}\right)}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

3d-rúmheildi

$$A(\bar{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int d\bar{r}' \, \frac{\bar{J}\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{u}\right)}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

Ef uppsprettan hefur lengdarskala a þá viljum við skoða geislunina fjarri henni þ.s. $r >> a$

Þar gildir

$$|\bar{r}-\bar{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\bar{r}\cdot\bar{r}' + (r')^2} = r - \hat{n}\cdot\bar{r}' + \ldots\ldots$$

Þar sem

$$\hat{n} = \frac{\bar{r}}{r}$$

er einingarvigurinn í átt athuganda

(3)

Aðfellu form mættanna fyrir $r >> a$ er þá

$$V(\bar{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon r}\int d\bar{r}' \, \rho\left(\bar{r}', t - \frac{r}{u} + \frac{\hat{n}\cdot\bar{r}'}{u}\right)$$

$$A(\bar{r},t) \approx \frac{\mu}{4\pi r}\int d\bar{r}' \, \bar{J}\left(\bar{r}', t - \frac{r}{u} + \frac{\hat{n}\cdot\bar{r}'}{u}\right)$$

Geislunar tíminn $t' \approx t - \underbrace{\frac{r}{u}}_{\text{burðartími til Athuganda}} + \underbrace{\frac{1}{u}\hat{n}\cdot\bar{r}'}_{\text{burðartími um uppsprettu}} = t_r$

Nú getum við metið sviðin

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A} \quad \text{og} \quad \bar{E} = -\bar{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}$$

(4)

og notum nálgunina

$$\bar{\nabla}\left\{\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{u} + \frac{\hat{n}\cdot\bar{r}'}{u}\right)\right\} = -\frac{\hat{n}}{r^2} f(t_r) - \left\{\frac{\hat{n}}{u} + \frac{\hat{n}\times(\hat{n}\times\bar{r}')}{ur}\right\}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{r} f(t_r)\right\}$$

$$t - \frac{r}{u} + \frac{\hat{n}\cdot\bar{r}'}{u} = t - \frac{r}{u} + \frac{\bar{r}\cdot\bar{r}'}{ru}$$

$$\bar{\nabla}\left(\frac{\bar{r}\cdot\bar{r}'}{r}\right) = \bar{\nabla}\left(\frac{\bar{r}}{r}\cdot\bar{r}'\right) = (\bar{r}'\cdot\bar{\nabla})\frac{\bar{r}}{r} + \bar{r}'\times\left(\bar{\nabla}\times\frac{\bar{r}}{r}\right)$$

$$= (\bar{r}'\cdot\bar{\nabla})\hat{n} + \bar{r}'\times\left\{\bar{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\times\hat{r} + \underbrace{\frac{1}{r}\bar{\nabla}\times\bar{r}}_{=0}\right\} = (\bar{r}'\cdot\bar{\nabla})\hat{n} + \bar{r}'\times\underbrace{(-\hat{u}\times\hat{u})}_{=0}\frac{1}{r}$$

$$= \frac{1}{r}\left(\bar{r}' - \hat{n}(\bar{r}'\cdot\hat{n})\right) = -\frac{1}{r}\hat{n}\times(\hat{u}\times\bar{r}')$$

$$= -\frac{n}{u}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{r} f(t_r)\right\} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

(5)

Því fæst fyrir sviðin (ef $r >> a$)

$$\bar{B}(r,t) \simeq -\frac{\mu}{4\pi}\hat{n}\times\frac{1}{r}\int d\bar{r}' \, \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\bar{J}(\bar{r}', t_r)$$

$$\bar{E}(r,t) \simeq \frac{\hat{n}}{u}\frac{1}{4\pi\epsilon r}\int d\bar{r}' \frac{\partial}{\partial t}\rho(\bar{r}', t_r) - \frac{\mu}{4\pi r}\int d\bar{r}' \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\bar{J}(\bar{r}', t_r)$$

Notum samfelldnijöfnuna

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\bar{r}', t_r) = -\bar{\nabla}'\cdot\bar{J}(\bar{r}', t_r) + \frac{\hat{n}}{u}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\bar{J}(\bar{r}', t_r)$$

$\bar{\nabla}'$ verkar líka á t_r með

$$\bar{\nabla}' t_r = \frac{\hat{n}}{u}$$

$\int d\bar{r}'\bar{\nabla}'\cdot\bar{J} = 0$
fyrir takmarkaða kerfið

notum síðan fyrir almennan vigur $\bar{F}$

$$\hat{n}(\hat{u}\cdot\bar{F}) - \bar{F} = \hat{n}\times(\hat{u}\times\bar{F})$$

Til þess að fá

$$\bar{E}(\bar{r},t) = u\hat{n}\times\left\{\frac{\mu}{4\pi}\,\hat{n}\times\frac{1}{r}\int d\bar{r}'\,\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\bar{J}(\bar{r}',t_r)\right\}$$

$$= -u\hat{n}\times\bar{B}(\bar{r},t) \qquad \left(\bar{B} = \frac{1}{u}\hat{n}\times\bar{E}\right)$$

Sviðin eru hornrétt og $E^2 = B^2u^2$

Orkuflæðið á flatar- og tímaeiningu er !

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu}\bar{E}\times\bar{B}$$

$$S = \bar{E}\times\bar{H} = \frac{1}{\mu}\bar{E}\times\bar{B}$$

Því er flæðið burt frá uppsprettu

$$\hat{n}\cdot\bar{S} = \frac{1}{\mu}(\hat{n}\times\bar{E})\cdot\bar{B} = \frac{uB^2}{\mu} = \frac{\mu}{(4\pi r)^2u}\left\{\hat{n}\times\int d\bar{r}'\,\frac{\partial}{\partial t}\bar{J}(\bar{r}',t_r)\right\}^2$$

(6)

Við höfum meiri áhuga á geisluninni inn í rúmhornið

$$d\Omega = \frac{ds}{r^2}$$

Það er óháð fjarlægð frá uppsprettu

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu}{(4\pi)^2u}\left\{\hat{n}\times\int d\bar{r}'\,\frac{\partial}{\partial t}\bar{J}(\bar{r}',t_r)\right\}^2 \qquad (*)$$

og heildaraflið er

$$P = \int d\Omega\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)$$

Þetta endanlega orkuflæði í mikilli fjarlægð er vegna $\frac{1}{r}$-hegðunar sviðanna (fjarsviðanna)

↑ sameiginleg öllum geislunarsviðum

(7)

Geislun frá hraðaðri eind

Eind með hleðslu e, og hraða $|\bar{v}| \ll u$ (c)

Straumþéttleikinn er

staðsetning eindar á tíma t'

$$\bar{J}(\bar{r}',t') = e\bar{v}(t')\,\delta(\bar{r}'-\bar{R}(t'))$$

Þá er seinkaði tíminn

$$t_r = t - \frac{r}{u} + \frac{1}{u}\hat{n}\cdot\bar{R}(t') \simeq t - \frac{r}{u} \equiv t_e \qquad \frac{v}{u} \ll 1$$

$$\int d\bar{r}'\,\frac{\partial}{\partial t}\bar{J}(\bar{r}',t_r) \approx \frac{d}{dt}\int d\bar{r}'\,\bar{J}(\bar{r}',t_e) = e\,\frac{d\bar{v}}{dt_e}(t_e)$$

Sem sýnir að eindin geislar þegar henni er hraðað

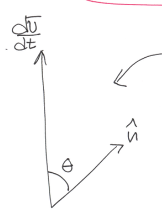
$|\bar{R}(t')|$ er takmarkað af $v\cdot\tau$ þ.s. τ er náttúrulegur tímaskali fyrir kerfið

(8)

Notum þessa niðurstöðu í (*) t.þ.a. kanna hvernig geislunin dreifist

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{(\mu e)^2}{(4\pi)^2u\mu}\left(\hat{n}\times\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\mu e}{4\pi}\right)^2\frac{1}{\mu u}\underbrace{\left\{\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2 - \left(\hat{n}\cdot\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2\right\}}_{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2(1-\cos^2\theta)}$$

$$= \left(\frac{\mu e}{4\pi}\right)^2\frac{1}{u\mu}\left(\frac{d\bar{v}(t_e)}{dt_e}\right)^2\sin^2\theta$$



θ er hornið milli hröðunarinnar og geislunarstefnunnar

Engin geislun í átt hröðunar

(9)

Notum $\int \frac{d\Omega}{4\pi} \sin^2\theta = \frac{2}{3}$

til að fá jöfnu Larmors fyrir heildar geislunaraflið eindar

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\frac{\mu e^2}{4\pi u}\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2}$$ þ. $v \ll u$

$$\boxed{P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon u^3}\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2}$$ $u^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}$

þegar tillit er tekið til afstæðiskenningar beinist geislunin „fram á við" með vaxandi hraða eindarinnar.

(10)

Dofnun

(1)

* Við höfum reiknað geislun frá loftneti með því að gefa okkur straumdreifingu í því ← Geislunin veltur á straumdreifingunni. Við höfðum engar áhyggjur hvort orku flæði breyti straumdreifingu.
* Við reiknum geislun frá hraðari eind ← eindin tapar orku og geislun hennar breytist ens og hröðunin

Getum við farið lengra í lýsingunni?
Er hægt að reikna ~~þessi~~ fyrirbæri sjálf-samkvæmt?

(2)

Svarið er já og nei!

* klassísk eðlisfræði ← CED
* skammtafræði ← QED

Getum lýst vissum fyrirbærum, en rekumst á vandamál nema „skammta-stala"

ótrúlega góð lýsing á dofnun í einföldu atómkerfi

Tengistuðull $\alpha = 1/137$ milli efnis og rafsegulsviðs er veikur
↓
Truflanareikningur

En viss vandamál ertast yfir til skammtafræðinnar

Mat á hvörfum

(3)

Eind með hleðslu e fær hröðun a á tímabili T

$\rightarrow E_{rad} \sim \frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon c^3} T$

er geislunarorka frá henni.

Geislunaráhrif á eindina eru lítilvæg ef $E_{rad} \ll E_0$

þar sem E_0 er mat á orku eindarinnar

skoðum tvenns konar kerfi

Eind kyrr í upphafi

Eftir hröðunina $E_0 \sim m(aT)^2$

Ef $\frac{e^2 a^2 T}{6\pi\epsilon c^3} \ll m a^2 T^2$

þá eru áhrif geislunarinnar lítilvæg, eða

$$T \gg \frac{e^2}{6\pi\epsilon m c^3}$$

(4)

Skilgreinum náttúrulegan tímaskala

$$\tau = \frac{e^2}{6\pi\epsilon m c^3}$$

Ef $T \gg \tau$ þá eru áhrif geislunar lítil

Léttust eind → langur τ fyrir rafeind fæst

$$\underline{\tau = 6.26 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{s}}$$

á því bili fer ljós $\sim 10^{-15}$ m !

Hreyfing eindar „lotubundin“

$$E_0 \sim m\omega_0^2 d^2$$

$$\rightarrow\ a \sim \omega_0^2 d\ , \quad T \sim \frac{1}{\omega_0}$$

$$E_{rad} \sim \frac{e^2 \omega_0^4 d^2}{6\pi\epsilon c^3}\frac{1}{\omega_0} \ll m\omega_0^2 d^2 \sim E_0$$

$$\rightarrow\ \omega_0 \tau \ll 1$$

> Því gildir: Ef ekki verður mikil breyting á hreyfingu eindar á τ þá eru áhrif geislunar lítil á hreyfingu eindar

(5)

Hreyfijöfnur

Sígild eind → hreyfilýsing

$$m\dot{\bar v} = \bar F_{ext}$$

bætum við gagnkrafti geislunar

$$m\dot{\bar v} = \bar F_{ext} + \bar F_{rad}$$

$\bar F_{rad}$ verður að uppfylla

* $\bar F_{rad} = 0$ ef $\dot{\bar v} = 0$
* $\bar F_{rad} \sim e^2$ og formerki hleðslu getur ekki skipt máli
* $\bar F_{rad}$ verður að innihalda τ, eini mikilvægi stikinn
* Við þekkjum $\bar F_{rad}$ ekki fyrirfram því $\bar a$ er óþekkt.

Lotubundið kerfi

Reiknum $\bar F_{rad}$ m.þ.a. krefjast að vinna þessa krafts á tímabilinu $t_1 < t < t_2$ sé jöfn neikvæðu orkunni geislaðri í burtu

(6)

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar F_{rad} \cdot \bar v\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}\dot{\bar v}\cdot\dot{\bar v}\, dt$$

$$= \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\bar v}\cdot\bar v\, dt - \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}(\dot{\bar v}\cdot\bar v)\Big|_{t_1}^{t_2}$$

fyrir lotubundið kerfi gæti $(\dot{\bar v}\cdot\bar v) = 0$ fyrir t_1 og t_2

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\left(\bar F_{rad} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}\ddot{\bar v}\right)\cdot\bar v\, dt = 0$$

$$\rightarrow\ \bar F_{rad} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}\ddot{\bar v} = m\tau\ddot{\bar v}$$

Abraham-Lorentz hreyfijafnan

og hreyfijafnan væri

$$\boxed{m(\dot{\bar v} - \tau\ddot{\bar v}) = \bar F_{ext}}$$

← mjög óvenjuleg tegund jöfnu

(7)

Skoðum lausnina þegar $\bar F_{ext} = 0$

$$\dot{\bar v}(t) = \begin{cases} 0 \\ \bar a\, e^{t/\tau} \end{cases}$$

þar sem $\bar a$ er hröðunin í $t=0$

Aðeins fyrri lausnin er eðlisfræðileg!

Umbreytum jöfnunni í heildisjöfnu með þeim upphafsskilyrðum

Setjum $\dot{\bar v}(t) = e^{t/\tau}\,\bar u(t)$

þá gefur AL-jafnan $\quad m\dot{\bar u} = -\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\bar F_{ext}(t)$

$$\rightarrow\ m\bar u(t) = -\frac{1}{\tau}\int_{C_1}^{t} dt'\, e^{-t'/\tau}\,\bar F_{ext}(t')$$

⑧

$$\rightarrow \quad m\dot{v}(t) = \frac{e^{t/\tau}}{\tau}\int_t^{C_1} e^{-t'/\tau} F_{ext}(t')\,dt'$$

C þarf að ákvarðast þ.a. út komi $m\dot{v} = F(t)$ þegar $e^2 \rightarrow 0$

Það fæst þegar $C_1 \rightarrow \infty$

$$m\dot{v}(t) = \frac{1}{\tau}\int_t^{\infty} dt'\, e^{-(t'-t)/\tau} F_{ext}(t')\,dt'$$

Breytuskipti $s = \frac{1}{\tau}(t'-t)$ gefa

$$m\dot{v}(t) = \int_0^{\infty} e^{-s} F_{ext}(t+\tau s)\,ds \qquad (**)$$

heildisafleiðujafna sést betur síðar

⑨

Gerum Taylor liðun

$$F(t+\tau s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau s)^n}{n!} \frac{d^n F(t)}{dt^n}$$

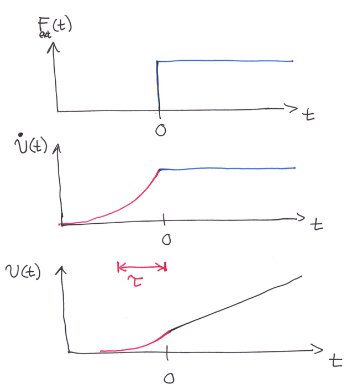
Innsetning í (**) gefur

$$m\dot{v}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \frac{d^n F(t)}{dt^n}$$

Markgildið $\tau \rightarrow 0$ skilur aðeins eftir $n=0$ liðinn og jöfnuna fyrir hreyfingu óhlaðinnar eindar. Hærri liðir eru leiðréttingar vegna geislunar

Jafnan inniheldur óstaðbundin hrif forhröðun

⑩



Skoðum þessa jöfnu fyrir sveifil

$$k = m\omega_0^2$$

(**) verður þá

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \int_0^{\infty} e^{-s} x(t+\tau s)\,ds}$$

Greinilega heildisafleiðujafna

Giskum á lausn

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t}$$

⑪

Innsetning gefur

$$x_0 e^{-\alpha t}\left\{\alpha^2 + \omega_0^2 \int_0^{\infty} e^{-(1+\alpha\tau)s}\,ds\right\} = 0$$

$\rightarrow$ $\mathrm{Re}(1+\alpha\tau) > 0$, þá verður α að uppfylla

tekur í burtu vaxandi lausn og annars er heildið ekki til.

$$\tau\alpha^3 + \alpha^2 + \omega_0^2 = 0$$

Setjum $\omega_0\tau \ll 1$

$$\alpha = \frac{\Gamma}{2} \pm i(\omega_0 + \Delta\omega)$$

$$\Gamma = \omega_0^2 \tau$$ dofnunartími (meðalævi)

$$\Delta\omega = -\frac{5}{8}\omega_0^3\tau^2$$ tíðnihliðrun

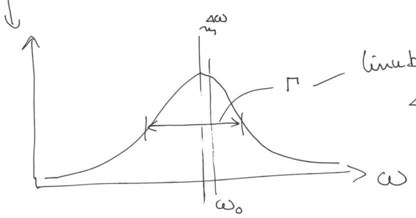
(12)

Geislunin verður „púls" með lengd $\frac{c}{\Gamma}$

$$E(\omega) \sim \int_0^\infty dt\, e^{-\alpha t} e^{i\omega t} = \frac{1}{\alpha - i\omega}$$

Geislaða orkan á tíðnieiningu er

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} = I_0 \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega-\omega_0-\Delta\omega)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$



$$\Delta\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega_0^2}\Gamma$$
$$= 2\pi c \tau$$

$\boxed{\text{universal sígild kerfi}}$

(13)

Skammtaljósfræði

Takið eftir hvernig línubreidd og meðal ofi eru reiknuð í skammtafræði

* Wigner Weißkopf
* Heitler-Ma . . . . . .

W. Heitler : „The Quantum theory of Radiation" (Dover)

IV - 16 V - 17, 18

(1)

Dreifing

Dreifing (og bognun)

Margs konar aðferðafræði fyrir mismunandi hlutföll bylgjulengdar λ og stærð árekstrarhlutar a

Skalar og vigurbognunar lýsingar

Er árekstrarmiðjan hörðin eind eða breyting í ϵ og μ?

Eða flókið í þéttleika ρ eða flókið í μ og ϵ . . . . .

fjölskauta liðanir

Hlutbylgjuliðun

Green falla framsetning

Skoðum mjög einföld líkön hér.

(2)

Thomson dreifing

Ein hleðsla e með massa m

$$| \;|\; | \longrightarrow \overset{e}{\bullet}$$

Inn kemur flöt rafsegulbylgja

Rafsviðið hraðar eindinni

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = e\bar{E} \qquad \left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$$

Hraðaða eindin geislar „dreifðri" bylgju með

afli

$$P_{sc} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}\left(\dot{\bar{v}}\right)^2$$
$$= \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}\left(\frac{e}{m}\bar{E}\right)^2$$
$$= \frac{e^4}{6\pi\epsilon m^2 c^3}\bar{E}^2$$

Þetta dreifða afl verður að bera saman við inn-aflið

$$|\bar{S}| = \frac{1}{\mu}|\bar{E}\times\bar{B}|$$
$$= \frac{1}{\mu c}|\bar{E}|^2$$

Hlutfallið gefur árekstrar þversniðið

$$\sigma = \frac{P_{sc}}{|\bar{S}|}$$

$$= \frac{1}{6\pi\epsilon^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon mc^2}\right)^2$$

$$= \frac{8\pi}{3} r_e^2 = \sigma_{Thompson}$$

þar sem r_0 er sagður „geisli" rafeindarinnar

→ $r_e = 2.8179 \cdot 10^{-15}$ m

En hvernig dreifist geislunin í mismunandi áttir?

um það bil sá geisli sem rafeindin hefði ef massi hennar samsvarar rafstöðuorku eindar með fastan hleðsluþéttleika.

$$r_e = \alpha^2 a_0$$

þar sem a_0 er geisli Bohrs og $\alpha = \frac{1}{137}$ er fínstuðlafastinn.

Horndreifing

Áður höfðum við fundið

$$\frac{dP_{sc}}{d\Omega} = \frac{\mu e^2}{(4\pi)^2 c}(\hat{n} \times \dot{\bar{v}})^2$$

$$= \frac{\mu e^4}{(4\pi)^2 m^2 c}(\hat{n} \times \bar{E})^2$$

$$= \frac{\mu e^4}{(4\pi)^2 m^2 c} E^2 \left\{1 - (\hat{n} \cdot \hat{\epsilon})^2\right\}$$

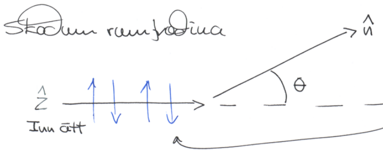
frá markinu (eindinni) í átt að athuganda

$\hat{\epsilon}$ er einingarvigur í átt $\bar{E}$

Hluti $\bar{E}$ samsíða $\hat{n}$ er $(\hat{n}\cdot\hat{\epsilon})\hat{n}E$

→ hluti $\bar{E}$ þvert á $\hat{n}$ er $\bar{E} - (\hat{n}\cdot\hat{\epsilon})\hat{n}E$

Skoðum rúmfræðina



Ef $\bar{E}$ liggur í dreifisléttu

Ef $\hat{\epsilon}$ er hornrétt á dreifisléttu

→ $\hat{n}\cdot\hat{\epsilon} = 0$

Ef $\hat{\epsilon}$ liggur í dreifisléttu

→ $\hat{n}\cdot\hat{\epsilon} = \sin\theta$

Engin dreifing hér ef $\theta = \pi/2$, endurspeglar það sem sást áður: Engin geislun í átt hröðunar

$$\rightarrow 1 - (\hat{n}\cdot\hat{\epsilon})^2 = \begin{cases} 1, & \text{ef } \hat{\epsilon} \perp \text{dreifisl.} \\ \cos^2\theta, & \text{ef } \hat{\epsilon} \parallel \text{dreifisl.} \end{cases}$$

Ef inngeislun er óskautuð þá fæst meðaltal þessara tveggja möguleika

$$1 - (\hat{n}\cdot\hat{\epsilon})^2 \rightarrow \frac{1 + \cos^2\theta}{2}$$

Afleidda þversniðið (þversniðið) er

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{dP_{sc}}{d\Omega}}{|\bar{S}|}$$

$$= \frac{\mu e^4}{(4\pi)^2 m^2 c} E^2 \left(\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right)\frac{\mu c}{E^2} =$$

$$= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon mc^2}\right)^2 \frac{1+\cos^2\theta}{2}$$

fyrir óskautaða inngeislun

og heildar Thompson þversniðið fæst aftur með heildun á þessari jöfnu yfir allt rúmhornið

7

Dreifing af bundinni rafeind

Rafeind, bundinni, er lýst sem deyfandi hreintóna sveifli

$$m\frac{d^2\bar r}{dt} + m\omega_0^2\bar r + m\gamma\frac{d\bar r}{dt} = e\bar E$$

Inn rafsvið bylgju er

$$\bar E(t) = \Re\, \bar E e^{-i\omega t} = \frac{1}{2}\left(\bar E e^{-i\omega t} + \bar E^{*} e^{i\omega t}\right)$$

færsla rafeindarinnar er þá lýst með

$$\bar r(t) = \frac{e}{m}\Re\left\{\frac{\bar E e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\right\}$$

lausn á

8

því inniheldur

$$P_{sc} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}(\ddot{\bar r})^2$$

$$\ddot{\bar r} = -\frac{e}{m}\Re\left\{\frac{\omega^2\bar E e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\right\}$$

fyrir meðalgildið á almennri stærð

$$A(t) = \Re\, A e^{-i\omega t}$$

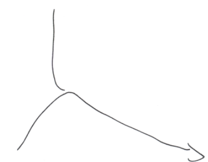
af öðru veldinu fæst

$$\left\{A^2(t)\right\}_{ave} = \frac{1}{2}|A|^2$$

Meðal innflæðið er

$$|S|_{ave} = \frac{1}{2\mu c}|\bar E|^2$$

$$\sigma = \frac{\{P_{sc}\}_{ave}}{\{|\bar S|\}_{ave}}$$



$$\to \left\{P_{sc}\right\}_{ave} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}\,\frac{1}{2}\,\frac{e^2\omega^4}{m^2}\,\frac{|\bar E|^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}$$

9

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon mc^2}\right)^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}$$

fyrir frjálsa eind $\omega_0 = 0,\ \gamma = 0$ fæst

$$\sigma \to \sigma_{Thampson}$$

þegar $\omega >> \omega_0, \gamma$

$$\sigma \to \sigma_{Thampson}$$

Há tíðni innbylgju bundna eindin getur ekki fylgt henni í hreyfingunni

þá yfirgnæfir tímaskali bylgjunnar tímaskala kerfisins (eindarinnar)

10

þegar $\omega << \omega_0$

$$\sigma \to \sigma_{Thampson}\cdot\frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

Hér dreifast hæstu tíðnirnar mest. Ein af ástæðunum fyrir bláum himni

Rayleigh-dreifing

Hermudreifing $\omega = \omega_0$

$$\sigma \to \sigma_{Thampson}\,\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}$$

Getur orðið mjög stór fyrir litla deyfingu

þá þarf líka að kanna aðrar frelsisgráður kerfisins sem taka við orku

Lítil rafsvarandi kúla

1

Áður höfum við leitt út geislunarjöfnu Larmors

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon c^3}\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2$$

og fyrir litla rafsvarandi kúlu (eða annan hlut) með tvípólsvægi

$$\bar{d}(t) = \int d\bar{r}\, \bar{r}\, \rho(\bar{r}t)$$

fæst

$$P \simeq \frac{1}{6\pi\epsilon c^3}(\ddot{\bar{d}})^2$$

og einnig

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{\mu}{(4\pi)^2 c}(\hat{n}\times\ddot{\bar{d}})$$

í báðum tilfellum fyrir $\frac{v}{c} \ll 1$

fyrir meðalgildin fæst því (í tímalotubundnu sviði)

$$\{P_{rad}\}_{ave} = \frac{\omega^4}{6\pi\epsilon c^3}\{(\bar{d})^2\}_{ave}$$

Við notuðum venjulega $\bar{p}$ fyrir tvískautsvægið

2

Fyrir rafsvarandi kúlu með geisla a í ytra rafsviði fæst (var í dæmi)

$$\bar{d} = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}a^3\bar{E}$$

þessi jafna er rétt fyrir tímaháð svið ef $\bar{E}$ breytist hægt á skala kúlunnar a, þ.e. ef

$$\frac{\lambda}{2\pi} \gg a$$

$$\{P_{rad}\}_{ave} = \frac{1}{6\pi\epsilon}\frac{\omega^4}{c^3}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}a^3\right)^2\{\bar{E}^2\}_{ave}$$

heildar árekstrarþversniðið er því

$$\boxed{\sigma = \frac{8\pi}{3}\frac{1}{\lambda\!\!\!^{-4}}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}a^3\right)^2}$$

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\lambda}{2\pi}, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Hér var aftur eins og í síðasta fyrirlestri notað

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP/d\Omega}{|\bar{S}|} \qquad \{A^2\}_{ave} = \frac{1}{2}|A|^2$$

$$\sigma = \int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega$$

3

Aftur sést hér að σ vex með ω^4

↑ langbylgjudreifing

Við höfum aðeins skoðað dreifingu og geislun í tvískautsnálgun

Larmor jafnan hefur því verið notuð til þess að meta dreifingu í fjölda tilfella

↑

~~nokkuð~~ snjallt

~~Aðferð~~ Schwingers

Sígild dreifing, orkustig

rafeindanna í markinu hafa ekki komið við sögu

Engin bognun skoðuð

Vigureiginleikar rafsegulsviðsins hafa lítið komið við sögu

Hvernig breytast $\bar{E}$ og $\bar{B}$?

Aðeins flóknari aðferð

4

Maxwellsjöfnur án ρ og $\bar{J}$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \qquad \bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = 0 \qquad \bar{\nabla}\times\bar{H} = \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2\bar{D} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\bar{D}}{\partial t^2} = -\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times(\bar{D}-\epsilon_0\bar{E}) + \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\bar{\nabla}\times(\bar{B}-\mu_0\bar{H}) \quad (*)$$

nákvæm jafna þar sem ϵ_0 og μ_0 geta verið háð staðarhniti $\bar{r}$, á einhverju takmörkuðu svæði gildir því

$$\bar{D} \neq \epsilon_0\bar{E} \quad \text{og} \quad \bar{B} \neq \mu_0\bar{H}$$

árekstrarsvæði

5

Hægri hliðin á (*) er því hverfandi nema á takmörkuðu svæði. Fyrir fasora fæst

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{D} = -\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times(\bar{D}-\epsilon_0\bar{E}) - i\epsilon_0\omega\bar{\nabla}\times(\bar{B}-\mu_0\bar{H})$$

og $k^2 = \mu_0\epsilon_0\omega^2$

Á því svæði þekkjum við hægri hliðina

Lausnin er þá

$$\bar{D} = \bar{D}^{(0)} + \frac{1}{4\pi}\int d\bar{x}'\,\frac{e^{ik|\bar{x}-\bar{x}'|}}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\left\{\begin{aligned}&\bar{\nabla}'\times\bar{\nabla}'\times(\bar{D}-\epsilon_0\bar{E})\\&+i\epsilon_0\omega\bar{\nabla}'\times(\bar{B}-\mu_0\bar{H})\end{aligned}\right\}$$

Innbylgja í heildisjöfnunni

gefin → reikna $\bar{D}$

6

Viljum fjarsvið

$$\bar{D} \to \bar{D}^{(0)} + \bar{A}_{sc}\frac{e^{ikr}}{r}$$

Kúlubylgja út

$$\bar{A}_{sc} = \frac{1}{4\pi}\int d\bar{x}'\, e^{-ik\hat{n}\cdot\bar{x}'}\left\{\begin{aligned}&\bar{\nabla}'\times\bar{\nabla}'\times(\bar{D}-\epsilon_0\bar{E})\\&+i\epsilon_0\omega\bar{\nabla}'\times(\bar{B}-\mu_0\bar{H})\end{aligned}\right\}$$

$$= \frac{k^2}{4\pi}\int d\bar{x}'\, e^{-ik\hat{n}\cdot\bar{x}'}\left\{\begin{aligned}&[\hat{n}\times(\bar{D}-\epsilon_0\bar{E})]\times\hat{n}\\&-\frac{\epsilon_0\omega}{k}\hat{n}\times(\bar{B}-\mu_0\bar{H})\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\bar{\epsilon}^*\cdot\bar{A}_{sc}|^2}{|\bar{D}^{(0)}|^2}$$

Segultvískaut

Raftvískaut

$\bar{\epsilon}$ er skautunarvigur dreifða geislans

7

Nú er oft gert ráð fyrir því að

$$\bar{D}(\bar{x}) = \{\epsilon_0 + \delta\epsilon(\bar{x})\}\bar{E}(\bar{x})$$

$$\bar{B}(\bar{x}) = \{\mu_0 + \delta\mu(\bar{x})\}\bar{H}(\bar{x})$$

þar sem $\delta\epsilon$ og $\delta\mu$ eru smá saman borið við ϵ_0 og μ_0

Nálgun línulegrar svörunar + Born

Í heildinu er notað

$$\bar{D}-\epsilon_0\bar{E} = \delta\epsilon(\bar{x})\bar{E} \approx \frac{\delta\epsilon(\bar{x})}{\epsilon_0}\bar{D}^{(0)}$$

$$\bar{B}-\mu_0\bar{H} = \delta\mu(\bar{x})\bar{H} \simeq \frac{\delta\mu(\bar{x})}{\mu_0}\bar{B}^{(0)}$$

8

Gefið

$$\bar{D}^{(0)}(\bar{x}) = \hat{\epsilon}_0 D_0 e^{ik\hat{n}_0\cdot\bar{x}}$$

$$\bar{B}^{(0)}(\bar{x}) = \eta_0\hat{n}_0\times\bar{D}^{(0)}(\bar{x})$$

1. Born nálgun

$$\frac{\bar{\epsilon}^*\cdot\bar{A}_{sc}^{(1)}}{D_0} = \frac{k^2}{4\pi}\int d\bar{x}\, e^{i\bar{q}\cdot\bar{x}}\left\{\begin{aligned}&\bar{\epsilon}^*\cdot\bar{\epsilon}_0\,\frac{\delta\epsilon(\bar{x})}{\epsilon_0}\\&+(\hat{n}\times\hat{\epsilon}^*)\cdot(\hat{n}_0\times\hat{\epsilon}_0)\frac{\delta\mu(\bar{x})}{\mu_0}\end{aligned}\right\}$$

$$\bar{q} = k(\hat{n}_0 - \hat{n})$$

$$= k^2\frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0}(\bar{\epsilon}^*\cdot\bar{\epsilon}_0)\left\{\frac{\sin(qa) - qa\cos(qa)}{q^3}\right\}$$

Ef kúla með $\delta\epsilon$ fasta innan geisla a

$$\lim_{q\to 0}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Born} = k^4a^6\left|\frac{\delta\epsilon}{3\epsilon_0}\right|^2|\bar{\epsilon}^*\cdot\bar{\epsilon}_0|^2$$

sem við höfðum með aðeins
annari táknum fyrir Rayleigh
dreifingu af rafsvarandi
kúlu í langbylgjunálgun

á engan hátt
einföld . . . .

Hér endum við þegar
dreifingin er rétt að
flækjast og verða
athyglisverð

Hvað gerist fyrir
styttri bylgjulengdir
og flóknari lögun?

Tengist líka efniseigin-
leikum