Jøfnur Maxwells

Høvdum fingið $\overline{E}$ og $\overline{B}$
við

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

Jafnan $\overline{\nabla} \times \overline{H} = \overline{J}$ uppfyllir ikki varðveitslulógina

$$\overline{\nabla} \cdot (\overline{\nabla} \times \overline{H}) = 0 = \overline{\nabla} \cdot \overline{J}$$

Eu $\overline{\nabla} \cdot \overline{J} = 0$ gildir ikki alment heldur

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \overline{\nabla} \cdot \overline{J} = 0$$

Tí er betri við líð

$$\overline{\nabla} \cdot (\overline{\nabla} \times \overline{H}) = 0 = \overline{\nabla} \cdot \overline{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\overline{\nabla} \cdot (\overline{\nabla} \times \overline{H}) = \overline{\nabla} \cdot \left(\overline{J} + \frac{\partial}{\partial t}\overline{D}\right)$$

ella

$$\overline{\nabla} \times \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial}{\partial t}\overline{D}$$

Tilrauuir sýna at nú erum við komin við fullkomið sett jafna

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bar{\nabla}\times\bar{E} = -\dfrac{\partial\bar{B}}{\partial t}, & \bar{\nabla}\times\bar{H} = \bar{J} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{D} \\ \bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho, & \bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \end{array}}$$

Jöfnur Maxwells

sem á heildis formi verða

$$\boxed{\begin{array}{ll} \oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\dfrac{d\Phi}{dt}, & \oint_C \bar{H}\cdot d\bar{l} = I + \int_S \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{D}\cdot d\bar{s} \\ \oint_S \bar{D}\cdot d\bar{s} = Q & \oint_S \bar{B}\cdot d\bar{s} = 0 \end{array}}$$

Mættisföll

Í segulstöðufræði var $\overline{\nabla}\cdot\overline{B}=0$ notuð t.þ.a.
finna vigurmætti $\overline{B}=\overline{\nabla}\times\overline{A}$

þessi jafna er óbreytt fyrir tímaháð svið

$\longrightarrow$ Höldum $\overline{A}$ þ.a. $\overline{B}=\overline{\nabla}\times\overline{A}$

Við veljum V þannig til þess að fyrir tímaóháð svið fáist aftur
$\overline{E}=-\overline{\nabla}V$

Athugum í lögmáli Faradays

$$\overline{\nabla}\times\overline{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\overline{B}$$

$$\rightarrow\ \overline{\nabla}\times\overline{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\nabla}\times\overline{A})\ \rightarrow\ \overline{\nabla}\times\left(\overline{E}+\frac{\partial\overline{A}}{\partial t}\right)=0$$

því er hægt að finna skalarmætti þ.a.

$$\overline{E}+\frac{\partial\overline{A}}{\partial t}=-\overline{\nabla}V$$

því fæst

$$\boxed{\bar{E} = -\bar{\nabla} V - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}}$$

því er tímaháð $\bar{E}$ ekki einungis vegna hleðslu í gegnum $-\bar{\nabla}V$ heldur einnig vegna breytilegs segulflæðis í gegnum $-\frac{\partial}{\partial t}\bar{A}$

því er ólíklegt að jöfnurnar

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho}{R}\, dv' \quad \text{og} \quad \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\bar{J}}{R}\, dv'$$

haldi nema fyrir nánast tímaóháð svið

(þessi svið eru lausnir jöfnu Poissons, sem er óháð tíma)

Leitum því jafna fyrir $\bar{A}$ og V sem uppfylla jöfnur Maxwells

Byrjum með

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t}\bar{D}$$

Notum fyrst $\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu}$ og $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$

og gerum ráð fyrir einsleitu efni
μ og ϵ eru þá fastar

$$\rightarrow \quad \bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu \bar{J} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t}\bar{E}$$

síðan líka $\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$ og $\bar{E} = -\bar{\nabla} V - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}$

$$\rightarrow \quad \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{A} = \mu \bar{J} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\bar{\nabla} V - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}\right)$$

Notum

$$\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A} = \bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A}$$

og fáum

$$\boxed{\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A} = \mu\bar{J} - \bar{\nabla}\left(\mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A}} \quad (*)$$

Til þess að ákvarða vigur $\bar{A}$ þarf bæði að ákvarða $\bar{\nabla}\cdot\bar{A}$ og $\bar{\nabla}\times\bar{A}$ (Langs- og þverþátt $\bar{A}$)

Við höfum $\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$

Ákvörðum langs þáttinn sem

$$\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{A} + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}V = 0}$$

Kvarðafrelsi....
Lorentz kvarði
margir aðrir möguleikar til

þá verður (*)

$$① \quad \boxed{\nabla^2\bar{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} = -\mu\bar{J}}$$

Hliðruð bylgjujafna fyrir $\bar{A}$

Byrjum nú með

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho \quad \text{og} \quad \bar{D} = \epsilon\bar{E}$$

og

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}V - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho \rightarrow \epsilon\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \rho \rightarrow -\bar{\nabla}\cdot\epsilon\left(\bar{\nabla}V + \frac{\partial}{\partial t}\bar{A}\right) = \rho$$

$$\longrightarrow \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Notum nú Lorentz kvörðun $\bar{\nabla}\cdot\bar{A} = -\mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}V$

$$\xrightarrow[②]{} \boxed{\nabla^2 V - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}V = -\frac{\rho}{\epsilon}}$$

Hliðruð bylgjujafna fyrir V

Hliðraðar bylgjujöfnur ①+② ákvarða $\bar{A}$ og V

Frá jöfnum Maxwells má finna jaðarskilyrðin

$$\boxed{\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ \hat{a}_{n2} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) &= \bar{J}_s \end{aligned}}$$

Ekki óháð skilyrði

jafngildar

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a}_{n2} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) &= \rho_s \\ B_{1n} &= B_{2n} \end{aligned}}$$

jafngildar

Tveir rafsvarar með

$\rho_s = 0, \quad \overline{J}_s = 0$

Ekkert orkutap

$$E_{1t} = E_{2t} \rightarrow \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

$$H_{1t} = H_{2t} \rightarrow \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Rafsvari (1)	Kjörleiðari (2)
$E_{1t} = 0$	$E_{2t} = 0$
$\hat{a}_{n2} \times \overline{H}_1 = \overline{J}_s$	$H_{2t} = 0$
$\hat{a}_{n2} \cdot \overline{D}_1 = \rho_s$	$D_{2n} = 0$
$B_{1n} = 0$	$B_{2n} = 0$

Lausnir bylgjujafna

Veljum punkt hleðslu $\rho(t)\Delta v'$

í miðju kúluhnitakerfi.

utan miðju gildir

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right)-\mu\epsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0$$

Rúmið er einsleitt, punkt hleðslan leiðir til kúlusamhverfu.

Engin átt er sérstæðari en önnur

Umritum

$$V(R,t)=\frac{1}{R}U(R,t)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}-\mu\epsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0$$

Einvíð bylgjujafna

Almennu lausnirnar eru öll tvídiffranleg föll af $(t-R\sqrt{\mu\epsilon})$ eða $(t+R\sqrt{\mu\epsilon})$

Við sjáum rétt bráðum að eðlisfræðilega lausnin er

$$U(R,t)=f(t-R\sqrt{\mu\epsilon})$$

$$U(R+\Delta R, t+\Delta t) = f\left(t+\Delta t - (R+\Delta R)\sqrt{\mu\epsilon}\right) = f(t - R\sqrt{\epsilon\mu})$$

$\rightarrow$ ef $\quad \Delta t = \Delta R\sqrt{\mu\epsilon} = \Delta R / u$

$\rightarrow \quad \Delta R = u\,\Delta t$

$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ er útbreiðsluhraði bylgjunnar

Þrívíða jafnan hefur lausnina

$$V(R,t) = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{u}\right)$$

Hefði punkt hleðslan verið óháð tíma hefði fengist lausn

$$\Delta V(R) = \frac{\rho\,\Delta v'}{4\pi\epsilon R}$$

Samanburður við lausn bylgjujöfnunnar gefur því

$$\Delta f\left(t - \frac{R}{u}\right) = \frac{\rho\left(t - \frac{R}{u}\right)\Delta v'}{4\pi\epsilon}$$

og almennu lausnirnar eru

$$\boxed{\begin{aligned} V(R,t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\rho\left(t - \frac{R}{u}\right)}{R}\, dv' \\[2em] \bar{A}(R,t) &= \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\bar{J}\left(t - \frac{R}{u}\right)}{R}\, dv' \end{aligned}}$$

<u>Seinkuðu lausnir</u> bylgjujafnanna í <u>einsleitu rúmi</u> (bylgja berst út <u>eftir</u> breytingu uppsprettu) við hentum óeðlisfræðilegu <u>flýttu lausnunum</u>