Segulstöðufræði

Tilraunir sýna að ekki aðeins rafkraftur verkar á hleðslur

$$\bar{F}_e = q\,\bar{E}$$

Viðbætist kraftur með annarskonar verkun

$$\bar{F}_m = q\,\bar{u} \times \bar{B}$$

Leiðir til nýs sviðs, $\bar{B}$, segulflæðisviðs.
Eiginleikum $\bar{B}$ er lýst með tímaóháðu jöfnunum

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \,, \qquad \bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$$

Seinni jafnan gefur

$$0 = \overline{\nabla}\cdot(\overline{\nabla}\times\overline{B}) = \mu_0\overline{\nabla}\cdot\overline{j} \rightarrow \overline{\nabla}\cdot\overline{j} = 0$$

í samræmi við „stöðufræði".

Fyrri jafnan gefur

$$\oint_S \overline{B}\cdot d\overline{s} = 0$$

Flæði $\overline{B}$ um lokað yfirborð er alltaf hverfandi í heild

→ ekki eru til frjálsar uppsprettur $\overline{B}$!
eins og hleðslur fyrir $\overline{E}$.
Segul einskaut eru ekki til! ← tilraunaniðurstaða

Stokes setningin gefur okkur

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$$

$$\rightarrow \int_S (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \cdot d\bar{s} = \mu_0 \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s}$$

$$\rightarrow \oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$

Heildi $\bar{B}$ um lokaða lykkju er jafnt strauminum um lykkjuna

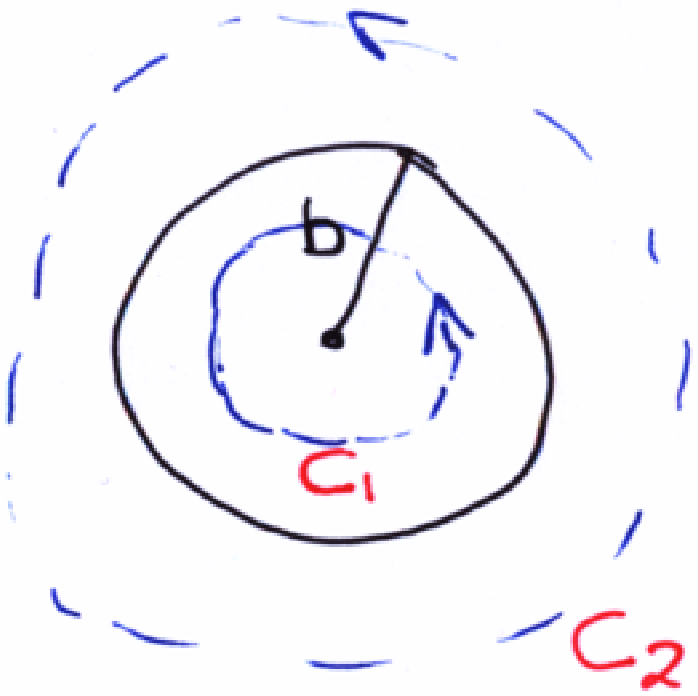
Lögmál Ampères. Hægt að nota á svipaðan hátt og Gauss lögmálið fyrir $\bar{E}$

<u>Segulstöðufræðinni</u> er lýst með

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{B} = 0 \qquad \oint_S \overline{B}\cdot d\overline{s} = 0$$

$$\overline{\nabla}\times\overline{B} = \mu_0 \overline{J} \qquad \oint_C \overline{B}\cdot d\overline{l} = \mu_0 I$$

<u>Dæmi</u>: Óendanlega langur vír með geisla b og straum I. Finna $\overline{B}$ utan og innan vírs



← veljum heildunarvegi hringlaga sammiðja leiðaranum

5

innan

$$d\bar{l} = \hat{a}_\phi r_1 d\phi$$
$$\bar{B}_1 = \hat{a}_\phi B_{\phi 1}$$

Heildið gefur hœgrihandar-reglu: þumall í straumstefnu fingur í $\bar{B}$ stefnu

$$\int_{C_1} \bar{B}_1 \cdot d\bar{l} = \int_0^{2\pi} B_{\phi 1} r_1 d\phi = 2\pi r_1 B_{\phi 1}$$

straumur innan C_1: $I_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi b^2} = \left(\frac{r_1}{b}\right)^2 I$

því verður

$$\bar{B}_1 = \hat{a}_\phi B_{\phi 1} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 r_1 I}{2\pi b^2} \qquad r_1 \le b$$

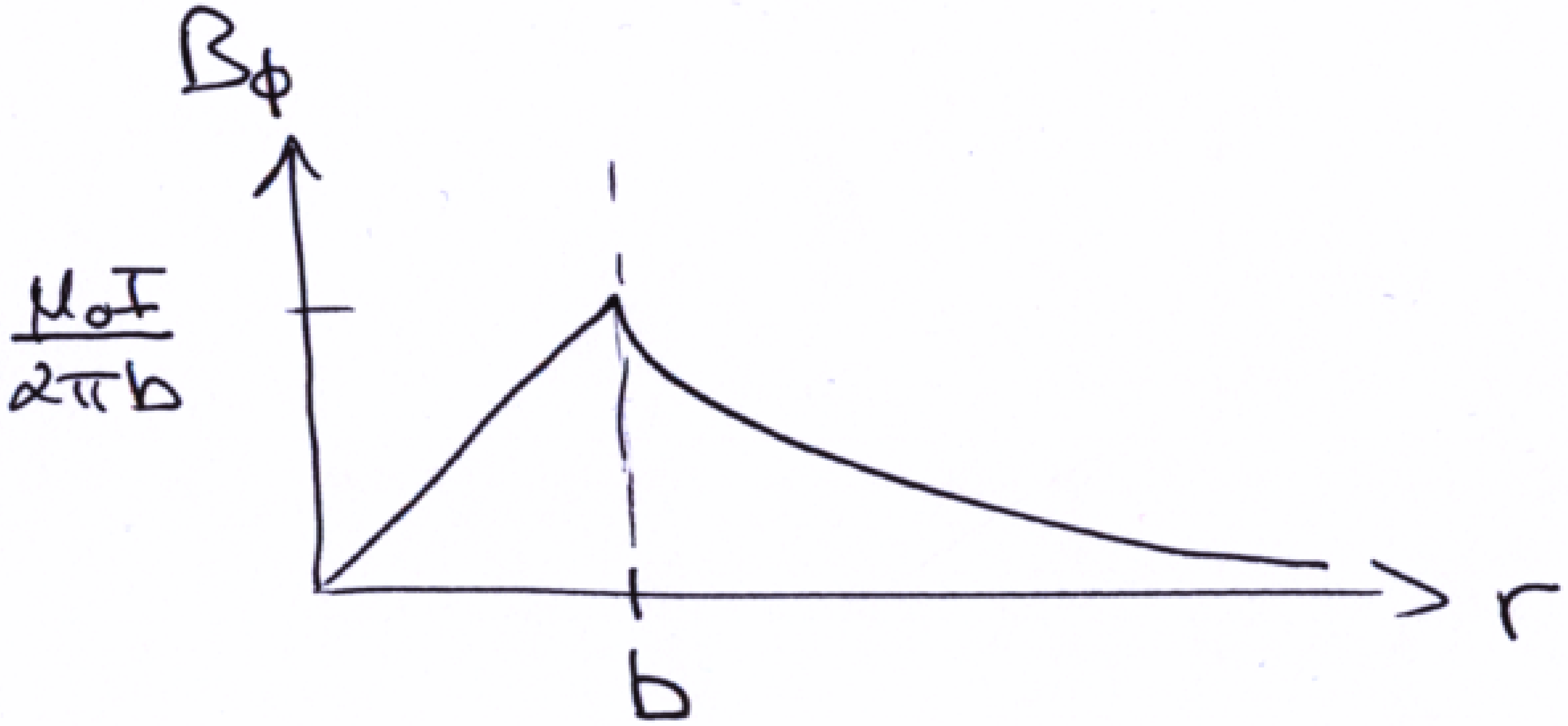
Vex línulega með fjarlægð frá miðju víra

Utan

$$\overline{B}_2 = \hat{a}_\phi B_{\phi 2} \;, \quad d\overline{l} = \hat{a}_\phi r_2 d\phi$$

$$\oint_{C_2} \overline{B}_2 \cdot d\overline{l} = 2\pi r_2 B_{\phi 2}$$

$$\longrightarrow \overline{B}_2 = \hat{a}_\phi B_{\phi 2} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \qquad r_2 \geq b$$



þá sést strax að inni í leiðandi sívalningskel með yfirborðstraum er $\overline{B} = 0$

En utan er sviðið af sams konar tegund

Vigurmættið

vegna $\bar{\nabla}\cdot\bar{B}=0$ er hægt að finna vigursvið $\bar{A}$ þ.a.

$$\boxed{\bar{B}=\bar{\nabla}\times\bar{A}}$$

þessi jafna nægir ekki til að fast ákveða $\bar{A}$

"Öll vigursvið $\bar{A}$ má skipta upp í tvo parta $\bar{A}=\bar{A}_l+\bar{A}_t$ þ.a. $\bar{\nabla}\times\bar{A}_l=0$ og $\bar{\nabla}\cdot\bar{A}_t=0$. Því er hægt að bæta $\bar{A}'$ við $\bar{A}$ þ.a. $\bar{\nabla}\times\bar{A}'=0$. $\bar{B}$ er óbreytt en $\bar{A}$ er ekki ákvarðað að fullu

Hér stendur t fyrir transverse og l fyrir longitudinal

Skoðum

$$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0 \bar{J} \;\rightarrow\; \boxed{\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A} = \mu_0\bar{J}}$$

Eða

$$\boxed{\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A} = \mu_0\bar{J}} \quad (*)$$

Í raun þarf að nota $\nabla^2\bar{A} = \bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) - \bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A}$ sem skilgreiningu á $\nabla^2\bar{A}$. Í kartískum hnitum fæst

$$\nabla^2\bar{A} = \hat{a}_x\nabla^2 A_x + \hat{a}_y\nabla^2 A_y + \hat{a}_z\nabla^2 A_z$$

en þessi einföldun er ekki almenn fyrir önnur hnitakerfi

Við sáum áður að $\bar\nabla \times \bar E = 0$ var notað til þess að finna V þ.a. $\bar E = -\bar\nabla V$

Hér má nota $\bar\nabla \times \bar A_\ell = 0$ til þess að finna skalarmætti sem gefi $\bar A_\ell$: $\bar A_\ell = -\bar\nabla\Phi$ t.d. þetta skalarmætti fundist aldrei í $\bar B$ því

$$\bar B = \bar\nabla \times \left(\bar A_t - \bar\nabla\Phi\right) = \bar\nabla \times \bar A_t$$

því tökum við mesta frelsi sem við höfum og krefjumst

$$\bar\nabla \cdot \bar A = 0$$

A hefur þá aðeins þverhluta

og þá fæst verður

$$\boxed{\nabla^2 \bar A = -\mu_0 \bar J}$$

(Coulombmáli, þvermáli, geislunarmáli)

Í óendanlegu stöðurúmi er lausn þessarar jöfnu

$$\boxed{\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} dr'^3 \, \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}} \quad (**)$$

Tengsl $\bar{A}$ og $\bar{B}$, $\boxed{\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}}$ má líka skrifa á heildisformi með því að heilda yfir yfirborð og nota reglu Stokes:

$$\Phi = \int_S \bar{B}\cdot d\bar{s} = \int_S (\bar{\nabla}\times\bar{A})\cdot d\bar{s} = \oint_C \bar{A}\cdot d\bar{l}$$

C er jaðar yfirborðsins S.

$$\rightarrow \quad \boxed{\Phi = \oint_C \bar{A}\cdot d\bar{l}}$$

Í (**) er straumurin fjallað um straumdreifingu sum er einvíð eftir einhvørjum lokaðum ferli C'
(J er þá støðgreint við δ- føllum) og tá fáa vit

$$\boxed{\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\bar{l}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|}}$$

Segulflogsvíddin er tá

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \bar{\nabla} \times \left(\frac{d\bar{l}'}{R} \right)$$

Notum

$$\bar{\nabla} \times (f\bar{G}) = f\, \bar{\nabla} \times \bar{G} + (\bar{\nabla} f) \times \bar{G}$$

og

$$\bar{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\bar{R}}{R^3} = -\hat{a}_R \frac{1}{R^2}$$

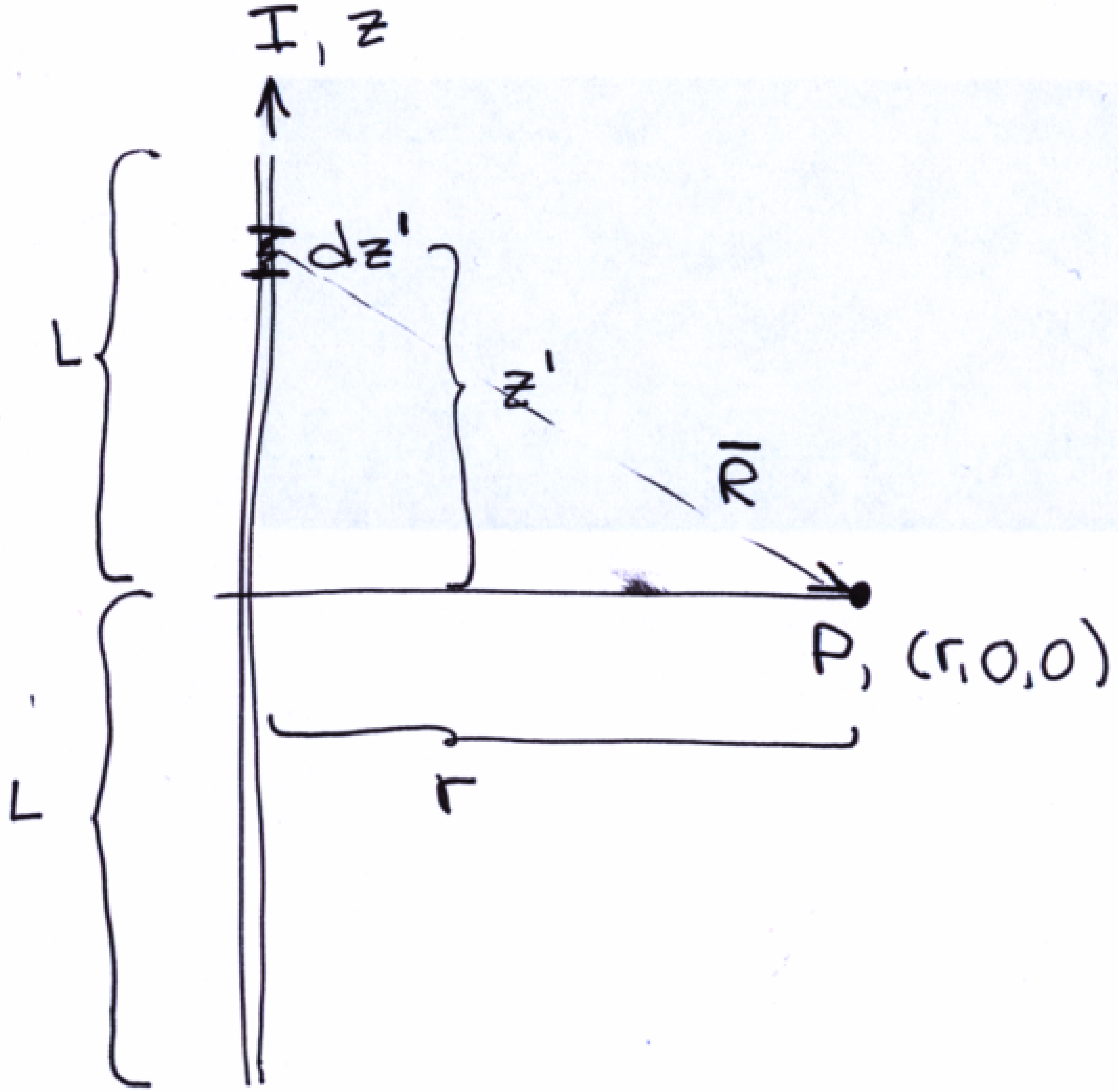
eindarvektor frá $\bar{r}'$ til $\bar{r}$

(einnig er ljóst að $\bar{\nabla} \times d\bar{l}' = 0$) því fæst lögmál Biot-Savart

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\bar{l}' \times \hat{a}_r}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2}$$

Dæmi

Leiðarabútur með lengd 2L og straum I. Finna $\bar{A}$ í fjarlægð r frá miðjunni.



Leiðarinn heldur áfram, því erum við aðeins að finna $\bar{A}$ í punkti P vegna þessa búts

$d\bar{l}' = \hat{a}_z dz'$, sivalnings hnit eru pogilegust

$R = \sqrt{(z')^2 + r^2}$

$$\rightarrow \bar{A} = \hat{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^{L} \frac{dz'}{\sqrt{(z')^2 + r^2}}$$

$$= \hat{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln\left(z' + \sqrt{(z')^2 + r^2}\right) \right] \Big|_{-L}^{L}$$

$$= \hat{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left\{ \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L} \right\}$$

$\bar{B}$ má síðan reikna út frá

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A} = \bar{\nabla} \times (\hat{a}_z A_z) = \hat{a}_r \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \hat{a}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

p.a.

$$\overline{B} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}}$$

Beta nota Biot-Savart

$$\overline{B}(\overline{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\overline{l}' \times \hat{a}_r}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\overline{l}' \times \overline{R}}{R^3}$$

með $\overline{R} = \hat{a}_r r - \hat{a}_z z'$, $d\overline{l}' \times \overline{R} = \hat{a}_z dz' \times (\hat{a}_r r - \hat{a}_z z')$

$$= \hat{a}_\phi r\, dz'$$

og

$$\overline{B} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^{L} \frac{r\, dz'}{((z')^2 + r^2)^{3/2}} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}}$$