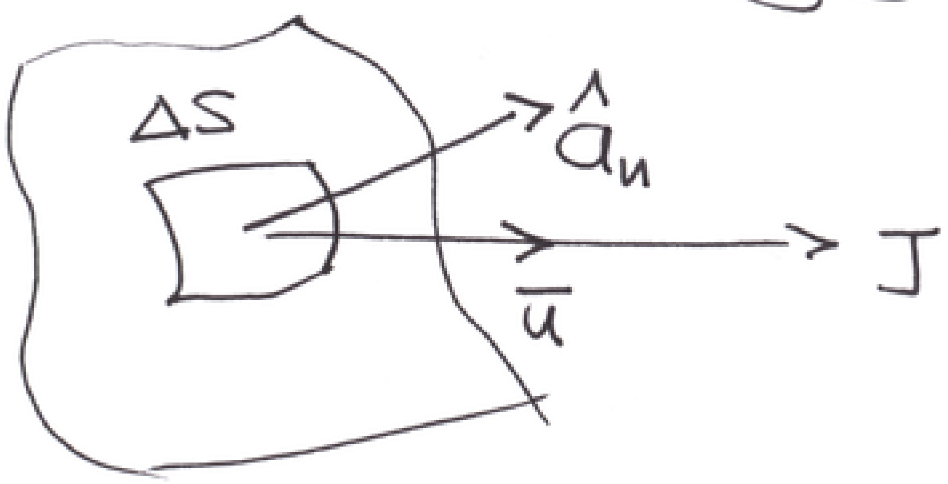
Sístæðir straumar

Straumþéttleiki og lögmál Ohms

Athugum straum hleðslubera í gegnum yfirborð



á tímanum Δt fer um ΔS

$$\Delta Q = \rho\, \bar{u} \cdot \underbrace{\hat{a}_n\, \Delta S}_{=\overline{\Delta S}}\, \Delta t$$

$$\rightarrow \Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho\, \bar{u} \cdot \overline{\Delta S}$$

er straumurinn um ΔS

ρ: hleðsluþéttleiki

Straumþéttleikinn er þá skilgreindur með

$$\Delta I = \bar{J} \cdot \overline{\Delta S}$$

Heildarstraumurinn er heildi hans yfir S

$$I = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s}$$

og

$$\bar{J} = \rho\, \bar{u}$$

Á okkar stórsæja skala er $\bar{u}$ rekhraði hleðslubera

Í mörgum efnum gildir

$$\bar{u} = -\mu_e \bar{E}$$

þ.s. μ_e er hreyfanleiki rafeinda, og einnig

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}$$

þ.s. $\sigma = -\rho_e \mu_e$

Þau efni eru kölluð ómsk (í þeim tengjast J og $\bar{E}$ línulega)

σ (conductivity) er eðlisleiðni efnis

Viðnám efnisbúts með lengd l og fastan þverskurð S er

$$\boxed{R = \frac{l}{\sigma S}}$$

Leiðni (conductance) efnisbúts er

$$G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{S}{l}$$

$$\boxed{\begin{gathered} R_{sr} = R_1 + R_2 \,, \quad \frac{1}{R_{\parallel}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ G_{\parallel} = G_1 + G_2 \end{gathered}}$$

lesa sjálf um íspennu og
Lögmál Kirchhoff's

Straumur um yfirborð S

$$I = \oint_S \bar{J} \cdot d\bar{s} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dv$$

$$\rightarrow \int_V \bar{\nabla} \cdot J \, dv = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

$$\downarrow$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

eða

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0}$$

samfelldnijafnan

Hleðsla er varðveitt í hverjum punkti rúmsins

Í einföldum ómskum leiðara gildir

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho + \sigma \bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\sigma}{\epsilon}\rho = 0$$

með lausn

$$\rho = \rho_0 e^{-\sigma/\epsilon t}$$

fyrir kopar er slökunartíminn

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \sim 1 \cdot 10^{-19} \text{ s}$$

Hleðsluberi með fastan rekhraða $\bar{u}$ í rafsviði $\bar{E}$

Vinnan framkvæmd af $\bar{E}$

$$\Delta W = q\bar{E} \cdot (\Delta \bar{l})$$

$$\rightarrow \quad P = \frac{\Delta W}{\Delta t}\bigg|_{\Delta t \to 0} = q\bar{E} \cdot \bar{u}$$

er aflið tekið frá $\bar{E}$

fyrir hleðslu þéttleika fast

$$dP = \bar{E} \cdot \rho \bar{u} \, dv$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{P = \int_V \bar{E} \cdot \bar{J} \, dv}$$

Joules reglan fyrir sístæðan straum

fyrir sístöðustraum gildir

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0 \quad \longrightarrow \quad \oint_S \bar{J}\cdot d\bar{s} = 0$$

Í ohmsku efni má setja saman

Heildisform

$$\bar{J} = \sigma\bar{E} \quad \text{og} \quad \bar{\nabla}\times\bar{E} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{\nabla}\times\left(\frac{\bar{J}}{\sigma}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \oint_C \frac{1}{\sigma}\bar{J}\cdot d\bar{l} = 0$$

samanburður við $\bar{E}$ og $\bar{D}$ við jaðar gefur

$$\boxed{J_{1n} = J_{2n}} \quad \text{og} \quad \boxed{\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$$

Einsleitur leiðari

Um sístöðan straum í einsleitum leiðara gildir

$$\bar{\nabla} \times \bar{J} = 0$$

því er til mættisfall ϕ þ.a.

$$\bar{J} = -\bar{\nabla}\phi$$

og $\nabla^2 \phi = 0$

Skilflötur tveggja leiðandi rafsvara (lekastraumur)

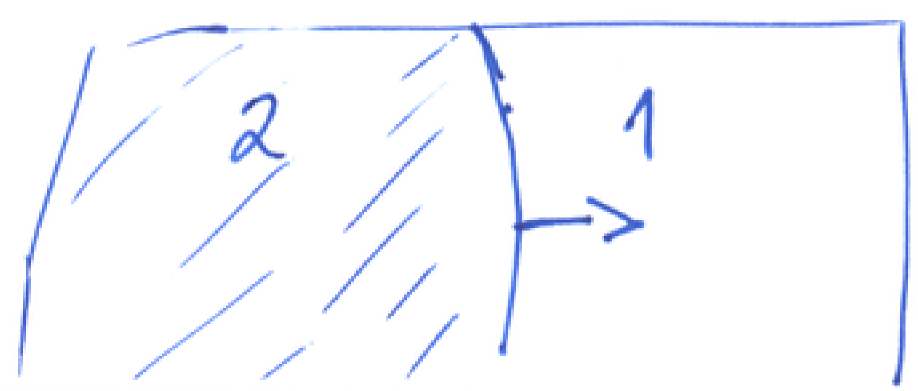
$$J_{1n} = J_{2n} \rightarrow \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \rightarrow \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \rho_s$$

því verður að vera hleðsla á skilfletinum

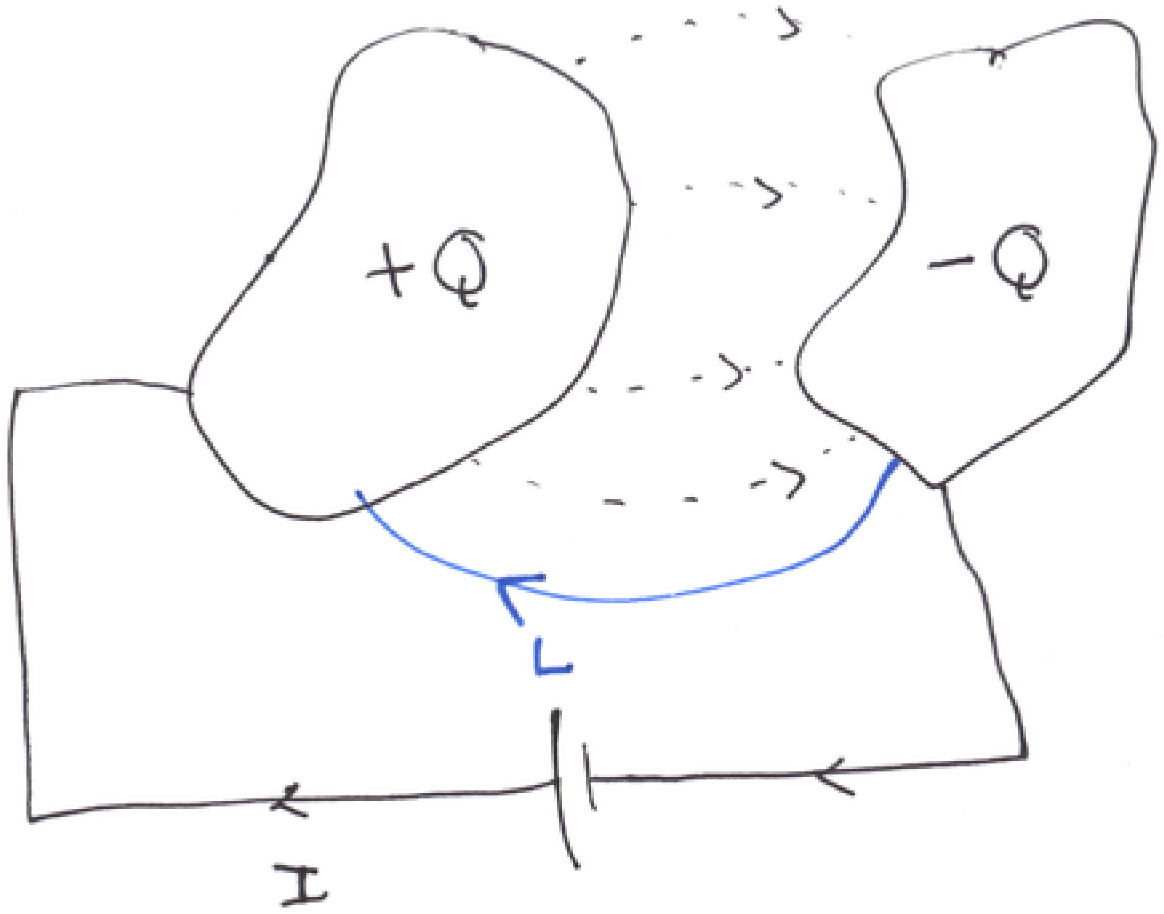
$$\rho_s = \left(\epsilon_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \epsilon_2\right) E_{2n}$$

$$= \left(\epsilon_1 - \epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) E_{1n}$$



Viðnám – rýmd

lekur rafsvari



fyrir viðnám gildir

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_L \bar{E}\cdot d\bar{l}}{\oint_S \bar{J}\cdot d\bar{s}} = \frac{-\int_L \bar{E}\cdot d\bar{l}}{\oint_S \sigma \bar{E}\cdot d\bar{s}}$$

fyrir rýmd

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{s}}{-\int_L \bar{E}\cdot d\bar{l}} = \frac{\oint_S \epsilon \bar{E}\cdot d\bar{s}}{-\int_L \bar{E}\cdot dl}$$

berum saman

$$\boxed{RC = \frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\sigma}}$$

fyrir einsleitt efni

Dæmi

samása vír, þar höfðum við áður fundið

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$$ á lengdareiningu.

því er lekaviðnámið á einingarlengd

$$R = \frac{\epsilon}{\sigma}\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Aðferð til að reikna viðnám milli jafnspennuflata í efni

1. velja hnitakerfi

2. Gera ráð fyrir V_0 milli skauta

3. finna $\bar{E}$ í leiðaranum (leysa Laplace ....)

4. finna heildarstrauminn

$$I = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} = \int_S \sigma \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

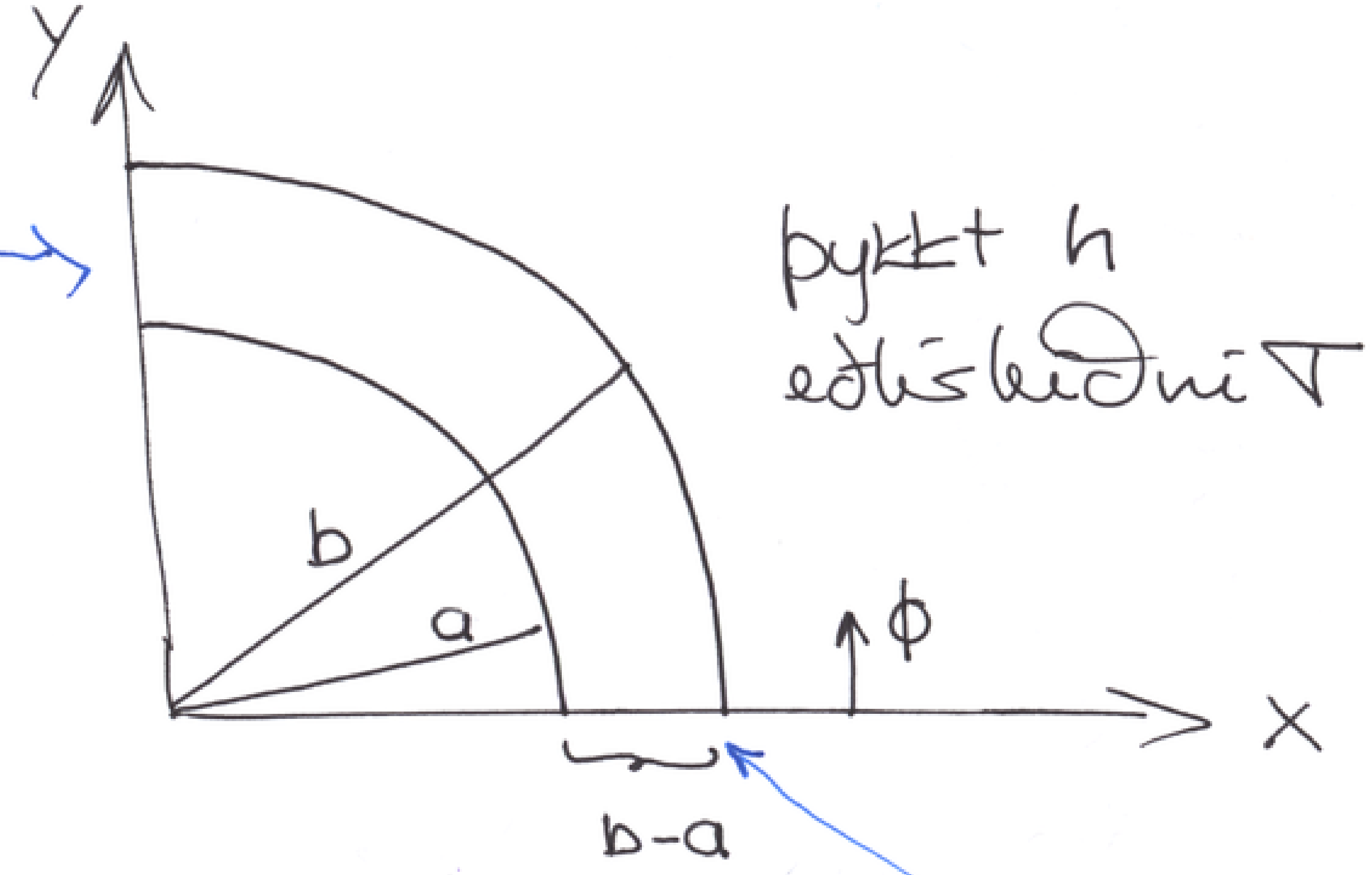
5. Finna R sem

$$R = \frac{V_0}{I}$$

Gildir aðeins fyrir einsleitt efni með ϵ og σ fasta

Dæmi

Reikna viðnám fjórðungsskinnu milli enda



Gerum ráð fyrir $V=0$ á $y=0$
eða $\phi=0$

$V=V_0$ á $x=0$ eða $\phi=\pi/2$

Sívalningshnit (í raun pólhnit)

$$\frac{d^2V}{d\phi^2}=0$$

almenn lausn

$$V=C_1\phi+C_2$$

með jaðarskilyrðum

$$\rightarrow V=\frac{2V_0}{\pi}\phi$$

Straumþéttleiki

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} = -\sigma \bar{\nabla} V = -\hat{a}_\phi \sigma \frac{\partial V}{r \partial \phi} = -\hat{a}_\phi \frac{2\sigma V_0}{\pi r}$$

finna I, $\quad d\bar{s} = -\hat{a}_\phi h\, dr$

$$I = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} = \frac{2\sigma V_0}{\pi} h \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{2\sigma h V_0}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

og því

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\pi}{2\sigma h \ln(b/a)}$$

D.K. Cheng minnir síðan á að það sé ekki augljóst í upphafi hvort $\bar{J}$ sé háð r !