① Hreintóna sveifill

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

~~truflaður með~~

$$\lambda H' = \lambda \hbar\omega \left(\frac{x}{a}\right)^3$$

$$a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Finnum breytingu grunnástandsorku með leiðréttingu upp í λ^2

$$E_0 = \hbar\omega \cdot \frac{1}{2}$$

núllta stigs

fyrsta stigs truflun er ①

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} + \langle 0 | \lambda H' | 0 \rangle$$

en $\langle 0 | \left(\frac{x}{a}\right)^3 | 0 \rangle = 0$ þ.s. heildið er af odd stæðu falli

$\to$ Enginn fyrsta stigs liður

Annars stigs leiðrétting

$$\epsilon_0 = E_0 + \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle n | H' | 0 \rangle|^2}{E_0 - E_n}$$

$$\langle n | H' | 0 \rangle = \hbar\omega \langle n | \left(\frac{x}{a}\right)^3 | 0 \rangle$$

Notum

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}(a_+ + a_-)$$

og

$$a_-|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$a_+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$\langle n|H'|0\rangle = \hbar\omega\langle n|\left(\frac{x}{a}\right)^3|0\rangle$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2\sqrt{2}}\langle n|(a_+ + a_-)^3|0\rangle$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2\sqrt{2}}\langle n|(a_+ + a_-)(a_+ + a_-)(a_+ + a_-)|0\rangle$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2\sqrt{2}}\langle n|(a_+ + a_-)(a_+ + a_-)a_+|0\rangle$$

~~a~~ viÞ látur hverfa vegna þ.a. $a_-|0\rangle = 0$

$$= \frac{\hbar\omega}{2\sqrt{2}}\langle n|\left\{a_+a_+a_+ + a_+a_-a_+ + a_-a_+a_+\right\}|0\rangle$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2\sqrt{2}}\left\{\delta_{n,3}\sqrt{6} + \delta_{n,1}\cdot 1 + \delta_{n,1}\sqrt{4}\right\} = \frac{\hbar\omega}{2\sqrt{2}}\left\{\delta_{n,3}\sqrt{6} + \delta_{n,1}\cdot 3\right\}$$

$$\rightarrow \epsilon_0 = E_0 + \lambda^2 \frac{(\hbar\omega)^2}{8} \left\{ \frac{6}{E_0 - E_3} + \frac{9}{E_0 - E_1} \right\}$$

$$E_0 - E_3 = -\hbar\omega \cdot 3 \quad , \quad E_0 - E_1 = -\hbar\omega$$

$$\rightarrow \epsilon_0 = \frac{\hbar\omega}{2} - \lambda^2 \frac{\hbar\omega}{8} \left\{ \frac{6}{3} + \frac{9}{1} \right\}$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} - \lambda^2 \hbar\omega \frac{11}{8} = \underbrace{\frac{\hbar\omega}{2} \left\{ 1 - \lambda^2 \frac{11}{4} \right\}}$$

Ortaa gruunāstandsiis hetur
Lokkas aadeins vegua
$\lambda H'$

2 Eind í 3D óendanlegum brunni

Ástönd $|n,l,m\rangle$ $\quad E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\beta_{nl}^2$

$$|\Psi(0)\rangle = A\left\{|0,2,0\rangle - i|1,2,1\rangle\right\}$$

a) Finna A. $|n,l,m\rangle$ eru ~~stöðluð~~ ástönd

$$|A|^2 = A^*A = \langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle$$

$$= A^*A\left\{\langle 0,2,0| + i\langle 1,2,1|\right\}\left\{|0,2,0\rangle - i|1,2,1\rangle\right\}$$

$$= |A|^2\left\{1+1\right\} \longrightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

er einn möguleiki

(5)

b) Fima $|\psi(t)\rangle$. Ástöndin $|n,l,m\rangle$ eru eiginástönd H

$$\rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|0,2,0\rangle e^{-i\omega_0\beta_{01}t} - i|1,2,1\rangle e^{-i\omega_0\beta_{12}t}\right\}$$

þar sem $\omega_0 = \frac{\hbar}{2ma^2} = \frac{E_0}{\hbar}$ ef $E_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$

---

c) Væntigildi orku hvenær $t=0$

$$\langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left\{\langle 0,2,0| + i\langle 1,2,1|\right\} H \left\{|0,2,0\rangle - i|1,2,1\rangle\right\}$$

$$= \frac{E_0}{2}\left\{\beta_{01} + \beta_{12}\right\}, \quad E_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

En, væntigildið klukkan t?

Sömu rökfærir sýna að $\langle \psi(t)|H|\psi(t)\rangle = \langle \psi(0)|H|\psi(0)\rangle$

H er hermískur, orka kerfisins er varðveitt

d) Væntigildi L^2 klukkan $t=0$, $L^2|n,l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|n,l,m\rangle$

$$\langle \psi(0)|L^2|\psi(0)\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\{6+6\} = \hbar^2 6$$

$|\psi(0)\rangle$ er eiginástand L^2

Væntigildi L_z, $L_z|n,l,m\rangle = \hbar m|n,l,m\rangle$

$$\langle \psi(0)|L_z|\psi(0)\rangle = \frac{\hbar}{2}\{0+1\} = \frac{\hbar}{2}$$

$|\psi(0)\rangle$ er ekki eiginástand L_z

e) Er bylgjufallið $\psi(\bar{x},0)$ kúlusamhvert.
Skoðum

$$\langle \bar{x} | \psi(0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ j_0\left(\beta_{01} \frac{r}{a}\right) Y_1^0(\theta,\varphi) + j_1\left(\beta_{12}\frac{r}{a}\right) Y_2^1(\theta,\varphi) \right]$$

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) \sim P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

$\rightarrow \langle \bar{x} | \psi(0) \rangle$ er háð báði θ og φ

$\rightarrow$ tað er ikki kúlusamhvert

d) $|\langle \bar{x} | \psi(0) \rangle|^2$ er líka báði háð θ og φ
og tí ikki kúlusamhvert.

9) Hver er merking n

n er í raun „radial skammtatala" hún segir til um fjölda núllstöðva r-þáttar bylgjufallsins frá miðju út að jaðri.

Í vetnisatómi er n höfuð skammtatalan þ.e. $E = -R_y \frac{1}{n^2}$ fyrir bundnu ástöndin. Höfuð skammtatalan telur ekki núllstöðvar fyrir vetnisatómið er „radial" skammtatalan n_r þ.a.

$$n = n_r + l + 1$$

③ Eind án spuna á einvíðum hring með geisla a

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\partial_\phi^2 = \frac{p^2}{2m}$$

a) Orkuróf og ástönd. Jafna Schrödingers er

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2ma^2}\partial_\phi^2\right\}\psi_n(\phi) = E_n\psi_n(\phi)$$

$$\psi_n(\phi+2\pi) = \psi_n(\phi)$$

$$\rightarrow \quad \psi_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\phi}, \qquad E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2ma^2}$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad n = -\infty, \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \infty$$

n = 0 er möguleg lausn, stöðuleg

b) Truflun $H_r^1 = -\frac{p^4}{8m^3c^2}$

Reiknum 1. stigs áhrif á orkurófið

Hér gildir að $H_0 \sim L_z^2$ og $H_r^1 \sim L_z^4$

L_z víxlast við H_0 og H_r, og eiginföll H_0 og L_z

eru með mismunandi ($H - L_z$) eigingildi fyrir ψ_n

Eigingildi H_0 er tvöföld, en ekki L_z!

$\rightarrow$ Við getum nota setninguna í Griffiths bls. 259

$\rightarrow$ þurfum ekki truflanareikn. fyrir margföld ástönd

$$\epsilon_n = E_n + \langle n | H_r^1 | n \rangle = E_n - \frac{\hbar^4 n^4}{8m^3c^2a^2}$$

$$\epsilon_n = E_n - \frac{\hbar^4 n^4}{8m^3c^2a^2} = \frac{\hbar^2 n^2}{2ma^2}\left\{1 - \underbrace{\frac{\hbar^2 n^2}{2ma^2}\,\frac{1}{2mc^2}}_{\text{Vidderlaust}}\right\}$$

$$= E_n\left\{1 - \frac{E_n}{2mc^2}\right\}$$

c) Orkustigin klofna ekki við H_r, pau lokka af $n \neq 0$ panning at $+n$ lokker jafn mikið og $-n$

Afstøðið rættingin er <u>einungis</u> hvat hvørt tilstøða en <u>ekki</u> statun

4 Ratsegulpúls

$$H' = -q E_0 z f(t)$$

Vetnisatóm í grunnástandi

Hvaða færslur eru mögulegar samkvæmt 1. stigs truflanareikn.?

þ.e. hvaða fylkjastök

$$\langle 0,0,0 | H' | n,l,m \rangle \neq 0 \qquad (*)$$

munum að $\quad z = r\cos\theta \sim r\, Y_1^0(\theta,\varphi)$

$$\langle \vec{r} | 000 \rangle \sim f(r)\, Y_0^0(\theta,\varphi)$$

Vitum að $\; Y_l^m(\Omega)$ eru hornrétt

→ $\langle F | nlm \rangle \sim Y_1^0(\theta,\varphi)$ til þess að (*)
sé uppfyllt

→ aðeins færslur upp í $|2,1,0\rangle$ eru mögulegar

En ef $H' = V_0 \exp(-\beta r^2) f(t) \sim Y_{00}(\Omega)$

þá eru mögulegar færslur upp í ástönd með $Y_{00}(\Omega)$
þ.e. $|n,0,0\rangle$ s-ástönd

r-heildið ákvarðar síðan hvaða s-ástönd eru líklegust.

5 Hreintóna sveifill truflaður með

$$H' = qE_0 x$$

Hvernig sjáum við að orku rófið breytist án þess að beita truflana reikningi eða nákvæmum reikn?

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$[H', H_0] = qE_0 \frac{1}{2m}[x, p^2] = \frac{qE_0}{2m}\left\{p[x,p] + [x,p]p\right\}$$

$$= \frac{qE_0}{2m} 2i\hbar \neq 0$$

$$\rightarrow [H_0 + H', H_0] \neq 0$$

Þess vegna hafa $H_0 + H'$ og H_0 ekki sömu eiginástöndin

Eiginástöndin breytast þegar $H_0 \to H_0 + H'$

Við bjuggumst því við breytingu á orkurófinu

Sem er staðfest með því að sjá

$$H_0 + H' \to \underbrace{\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0)^2}_{\substack{\text{Hreintóna sveifill} \\ \text{hliðraður} \\ \to \text{sama róf}}} \underbrace{+\Delta E}_{\text{breyting á rófi}}$$

Til eru margar mismunandi leiðir til þess að nálgast þetta dæmi. Hér er eins hægt að nota framsetn. með hækkunar og lækkunarvirkjunum

Þá fæst að $H' \sim (a_+ + a_-)$, $H_0 = \hbar\omega(a_+ a_- + \frac{1}{2})$

og því einfalt að finna að $[H_0 + H', H_0] \neq 0$

Síðan má (eins og í fyrirlestri 22) finna hliðrunarvirkja

$$U(-\lambda) = e^{\lambda(a_- - a_+)}$$

með

$$U(-\lambda)\, a_-\, U^\dagger(-\lambda) = a_- + \lambda$$

$$U(-\lambda)\, a_+\, U^\dagger(-\lambda) = a_+ + \lambda$$

og $$U(-\lambda) H_0 U^+(-\lambda) = H_0 + H' + \lambda^2 \hbar\omega$$

og velja λ rett fyrir H' lær.