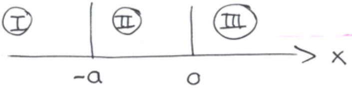
Fimmadreifi ástönd mættisins $V(x) = \alpha\{\delta(x) + \delta(x+a)\}$



Bylgjuföllin á svæðunum

I $\quad \psi(x) = e^{ikx} + Be^{-ikx}$

II $\quad \psi(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$

III $\quad \psi(x) = Fe^{ikx}$

Gerum ráð fyrir inn-bylgju með $A=1$ frá vinstri, engin inn-bylgja frá hægri

$E > 0 \quad , \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

Samfella í $x=-a$

$$e^{-ika} + Be^{+ika} = Ce^{-ika} + De^{+ika} \qquad (1)$$

Samfella í $x=0$

$$C + D = F \qquad (2)$$

Brot afleiðu í $x=-a$

$$\psi'(-a^+) - \psi'(-a^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(-a)$$

$$ik\left\{Ce^{-ika} - De^{ika} - e^{-ika} + Be^{ika}\right\} = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\left\{e^{-ika} + Be^{ika}\right\} \qquad (3)$$

Brot afleiðu í $x=0$

$$ik\left\{F - C + D\right\} = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} F \qquad (4)$$

---

(2) $\longrightarrow$ $D = F - C$

$$(1):\quad e^{-ika} + Be^{ika} = Ce^{-ika} + (F-C)e^{ika}$$

$$(3):\quad \left\{Ce^{-ika} - (F-C)e^{ika} - e^{-ika} + Be^{ika}\right\} = \underbrace{\frac{2m\alpha}{ik\hbar^2}}_{\beta}\left\{e^{-ika} + Be^{ika}\right\}$$

$$(4):\quad \left\{F - C + (F-C)\right\} = \underbrace{\frac{2m\alpha}{\hbar^2 ik}}_{\beta} F$$

3 jöfnur, endurtekum

(1): $e^{ika}B + C(e^{ika} - e^{-ika}) - Fe^{ika} = -e^{-ika}$

(3): $e^{ika}(1-\beta)B + (e^{ika} + e^{-ika})C - Fe^{ika} = e^{-ika}(1+\beta)$

(4): $-2C + F(2-\beta) = 0$

(4) $\longrightarrow$ $F = \dfrac{2C}{2-\beta}$

(4) $\to$ (1): $e^{ika}B + 2i\sin(ka)C - \dfrac{2C}{2-\beta}e^{ika} = -e^{ika}$

$$\boxed{e^{ika}B + C\left\{2i\sin(ka) - \frac{2e^{ika}}{2-\beta}\right\} = -e^{-ika}}$$ (1')

$$C = \frac{F}{2}(2-\beta)$$

nota i 1

$$\boxed{e^{ika} B + F\left\{ i(2-\beta)\sin(ka) - e^{ika} \right\} = -e^{-ika}}$$ i

nota i 3

$$\boxed{e^{ika}(1-\beta)B + F\left\{ (2-\beta)\cos(ka) - e^{ika} \right\} = e^{-ika}(1+\beta)}$$ ii

$$\text{i} \rightarrow \quad e^{ika} B = -e^{-ika} - F\left\{ i(2-\beta)\sin(ka) - e^{ika} \right\}$$

nota i ii

$$-(1-\beta)e^{-ika} - (1-\beta)F\left\{ i(2-\beta)\sin(ka) - e^{ika} \right\}$$

$$+ F\left\{ (2-\beta)\cos(ka) - e^{ika} \right\} = e^{-ika}(1+\beta)$$

$$\rightarrow F\left[\left\{ (2-\beta)\cos(ka) - e^{ika} \right\} - (1-\beta)\left\{ i(2-\beta)\sin(ka) - e^{ika} \right\} \right]$$

$$= e^{-ika}(1+\beta) + (1-\beta)e^{-ika}$$

$$= e^{-ika} 2$$

$$F\left[-\beta e^{ika} + (2-\beta)\cos(ka) - i(2-\beta)(1-\beta)\sin(ka)\right] = e^{-ika}\,2$$

$$F\left[-\beta e^{ika} + i(2-\beta)\beta\sin(ka) + (2-\beta)e^{-ika}\right] = e^{-ika}\,2$$

$$F\left[2e^{-ika} - 2\beta\cos(ka) + i(2-\beta)\beta\sin(ka)\right] = e^{-ika}\,2$$

$$F = \frac{e^{-ika}\,2}{2e^{-ika} - 2\beta\cos(ka) + i(2-\beta)\beta\sin(ka)}$$

$$= \frac{e^{-ika}\,2}{2\cos(ka) - 2i\sin(ka) - 2\beta\cos(ka) + i(2-\beta)\beta\sin(ka)}$$

Setjum $\beta = \frac{2m\alpha}{ik\hbar^2} = i\gamma$ med $\gamma = -\frac{2m\alpha}{k\hbar^2} \in \mathbb{R}$

$$F = \frac{e^{-ika}\, 2}{2\,\mathrm{Cos}(ka) - 2i\,\mathrm{Sin}(ka) - 2i\gamma\,\mathrm{Cos}(ka) + i(2-i\gamma)\,i\gamma\,\mathrm{Sin}(ka)}$$

$$= \frac{e^{-ika}\, 2}{2\,\mathrm{Cos}(ka) - 2\gamma\,\mathrm{Sin}(ka) + i\left[-2\gamma\,\mathrm{Cos}(ka) + (\gamma^2-2)\,\mathrm{Sin}(ka)\right]}$$

$$|F|^2 = FF^* = \frac{4}{4\left[\mathrm{Cos}(ka) - \beta\,\mathrm{Sin}(ka)\right]^2 + \left[(\gamma^2-2)\,\mathrm{Sin}(ka) - 2\gamma\,\mathrm{Cos}(ka)\right]^2}$$

$$= \frac{1}{\left[\mathrm{Cos}(ka) - \beta\,\mathrm{Sin}(ka)\right]^2 + \frac{1}{4}\left[(\gamma^2-2)\,\mathrm{Sin}(ka) - 2\gamma\,\mathrm{Cos}(ka)\right]^2}$$

$$B = -e^{-2ika} - e^{-ika} F\left\{ i(2-\beta)\sin(ka) - e^{ika} \right\}$$

$$= -e^{-2ika} - e^{-ika} F\left\{ i(2-i\gamma)\sin(ka) - e^{ika} \right\}$$

$$= -e^{-2ika} - \frac{2\left\{ i(2-i\gamma)\sin(ka) - e^{ika} \right\} e^{-2ika}}{2\cos(ka) - 2\gamma\sin(ka) + i\left\{ (\gamma^2-2)\sin(ka) - 2\gamma\cos(ka) \right\}}$$

Ég ætla að nota í grafík $|F|^2$, og innan gnuplots að reikna $|B|^2$ frá B-inu hér.

Til þess þarf ég að hugsa um stöðum

Ég vil nota tækifærið til að sýna að gnuplot vinnur mjög einfaldlega með tvinntölur.

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (ka)^2}{2ma^2} = E_1 \cdot (ka)^2$$

$$\beta = \frac{2m\alpha}{i\,k\hbar^2} = i\gamma \;\to\; \gamma = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2 k} = -\frac{2m\alpha a}{\hbar^2 (ka)}$$

víddarlausar stærðir

$$= -\frac{2ma^2}{\hbar^2 (ka)}\frac{\alpha}{a} = -\left(\frac{\alpha}{aE_1}\right)\frac{1}{ka}$$

Ég hugsa mér að E_1 sé gefinn og þarf því að segja til um styrk δ-mættis með $\frac{\alpha}{aE_1}$

Munum að $[\alpha] \sim$ Orka $\cdot$ L

Hér mun fylgja gnu-skrifta sem býr til grafið í gnuplot með skipuninni

"Load skrifta.gnu"

```
set term post landscape enhanced solid color "Helvetica" 18
set output 'TR16p0.ps'
```

ps prentun

```
#
set xlabel 'ka'
set ylabel 'Probability(ka)'
set title "{/Symbol a}/(aE_1)=16.0"
```

merking ása og grafs

```
#
g(x)=-16.0/x
R(x)=(cos(x)-g(x)*sin(x))**2
Q(x)=0.25*(((g(x)**2)-2.0)*sin(x)-2.0*g(x)*cos(x))**2
F2(x)=1.0/(R(x)+Q(x))
#
ci={0.0,1.0}
```

i

```
A1(x)=-exp(-2.0*ci*x)
A2(x)=2.0*(ci*(2.0-ci*g(x))*sin(x)-exp(ci*x))*exp(-2.0*ci*x)
A3(x)=2.0*(cos(x)-g(x)*sin(x))
A4(x)=ci*(((g(x)**2)-2.0)*sin(x)-2.0*g(x)*cos(x))
B(x)=(abs(A1(x)-A2(x)/(A3(x)+A4(x))))**2
#
set samples 4000
```

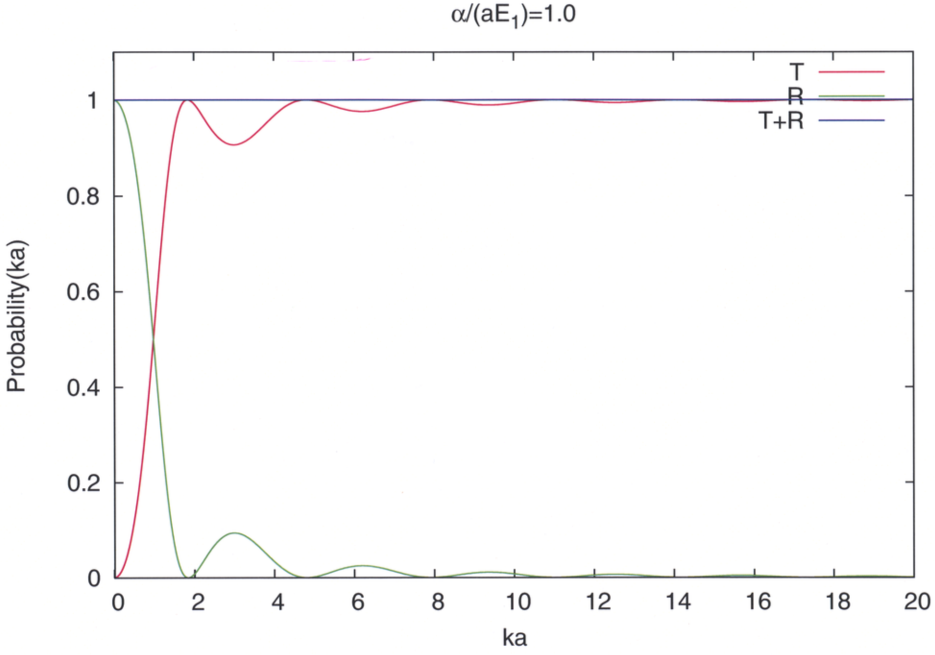
fjölgum punkta

```
plot [0.01:20.0][0:1.1] F2(x) w l title "T" lw 2,\
B(x) w l title "R" lw 2,\
B(x)+F2(x) w l title "T+R" lw 2
```

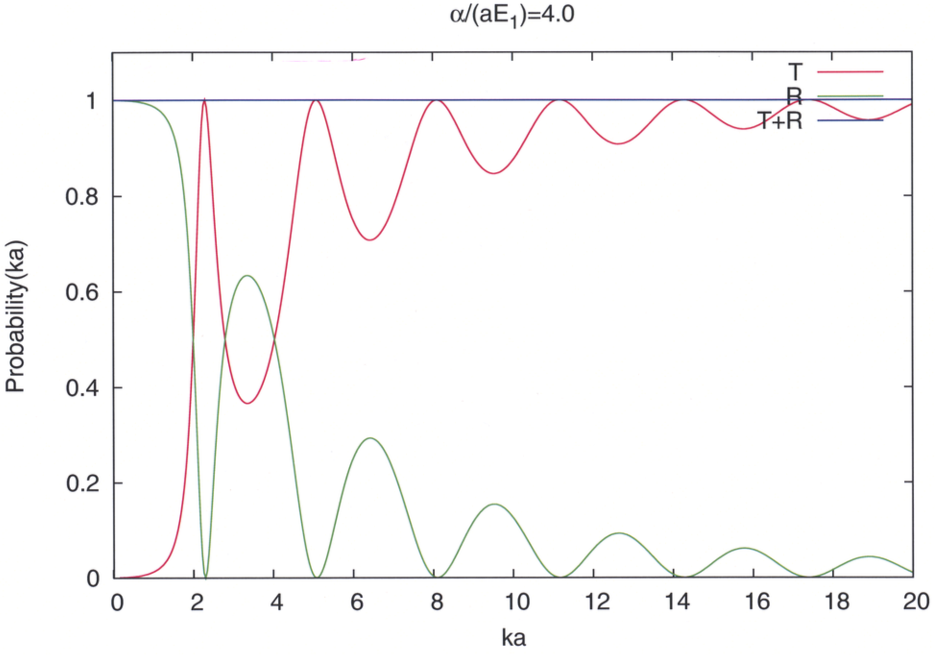
plot

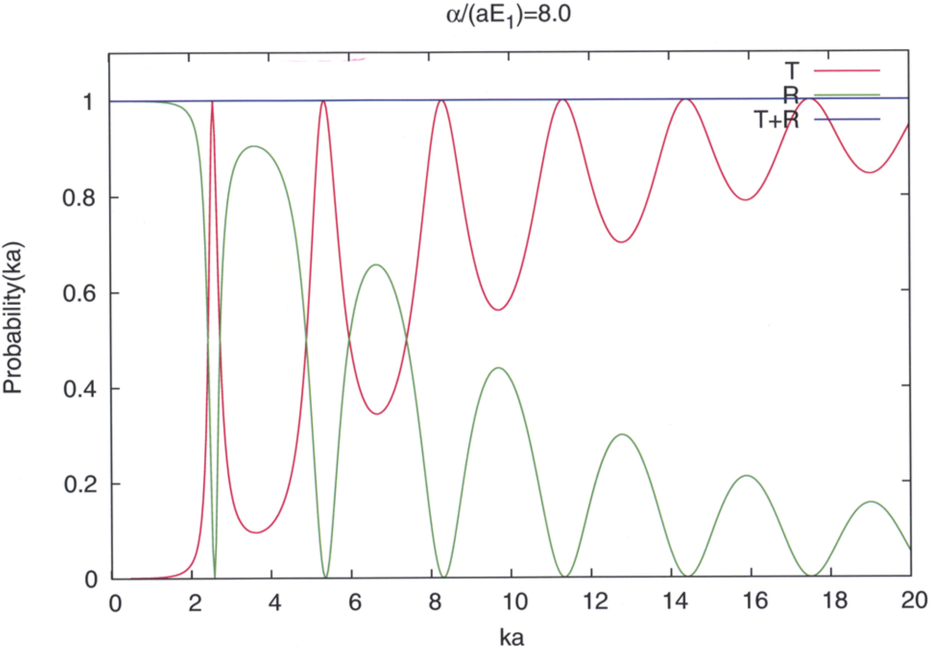
Keyrist með

"gnuplot 2-delta.gnu"



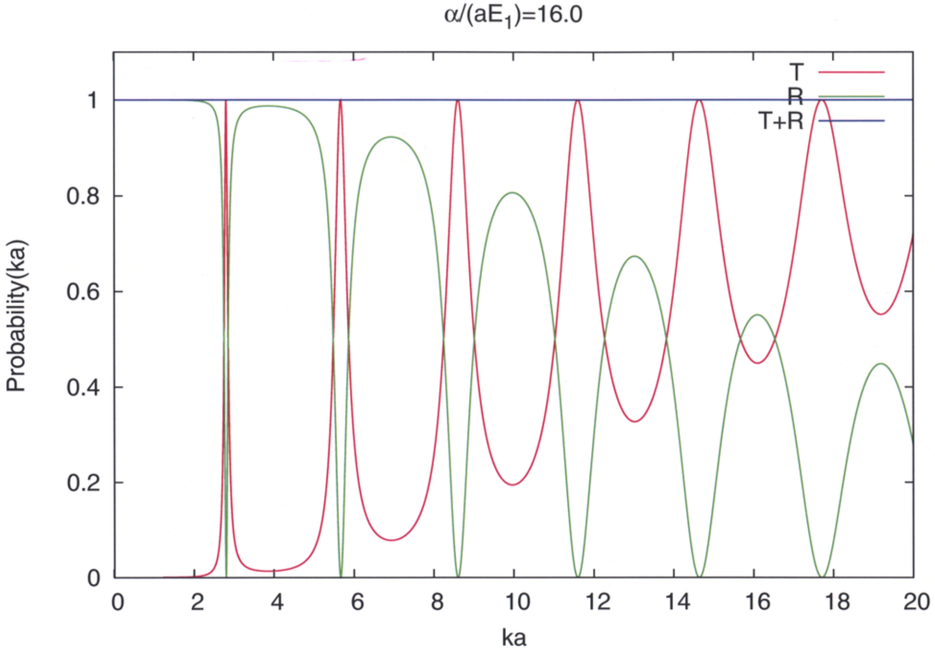
α/(aE₁)=1.0
T
R
T+R
Probability(ka)
ka
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


$\alpha/(aE_1)=4.0$
T
R
T+R
Probability(ka)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
ka



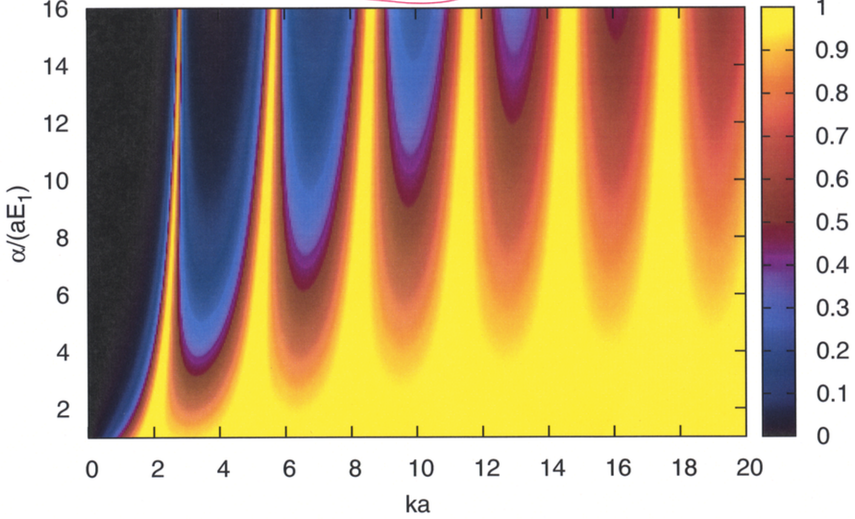
$\alpha/(aE_1)=8.0$
T
R
T+R
Probability(ka)
ka
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

15

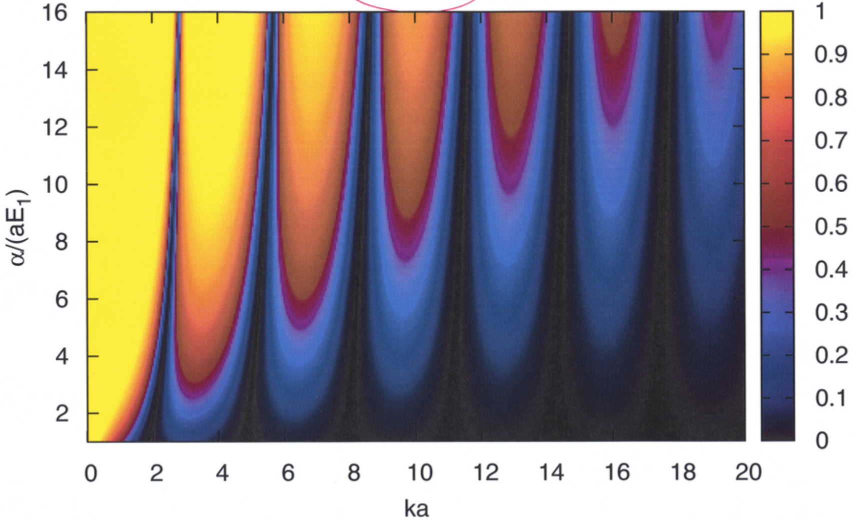


α/(aE₁)=16.0
T
R
T+R
Probability(ka)
ka
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

T


16
14
12
10
8
6
4
2
α/(aE$_1$)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
ka
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0

R



16
14
12
10
8
6
4
2
α/(aE1)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
ka
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0

Því sést að auðvelt væri að reikna líka C og D
með aðstoð gnuplots (eða octave) og síðan mætti
teikna líkindadreifingarnar $|\Psi(x)|^2$ á öllu
svæðinu og sjá líðun inn og speglunar bylgju
á svæði I, hvernig líkindin á II vaxa og
minnka með (ka) og hvernig þau eru flöt á
svæði III

Þetta eru myndir sem ég hef ekki séð
í kennslubókum en segja mikið
um eðlisfræðina