Dæmi 1

1

Ögn hreyfist í mættinu $U(x) = U_0\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right]^2$

Könnum ferla hennar í fasarúminu $(x,\dot{x})$

Heildarorka hennar er $E_T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U_0\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right\}^2$

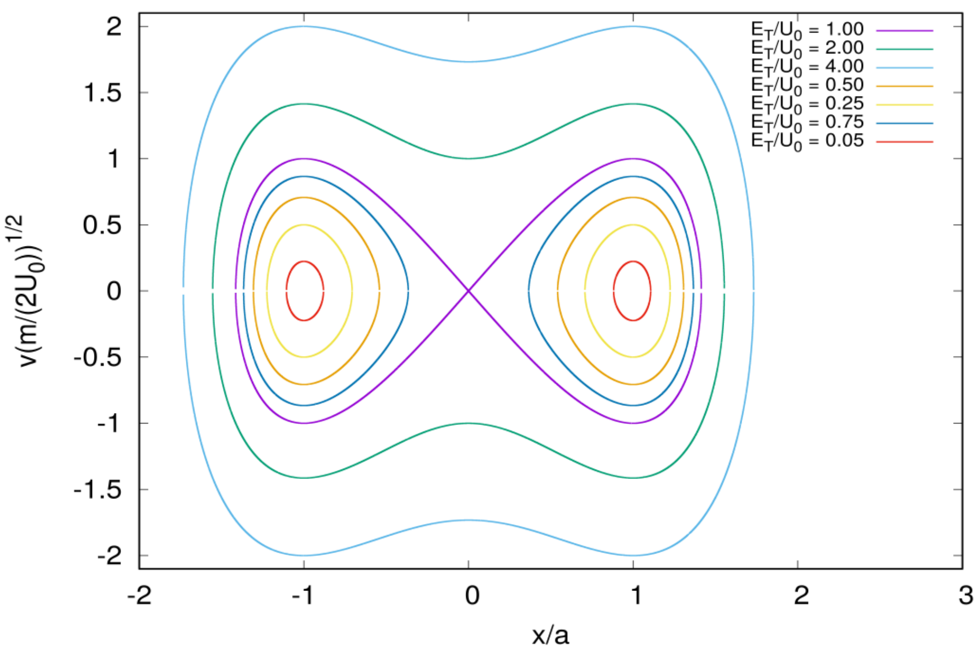
$$\rightarrow \quad \frac{m}{2}\dot{x}^2 = E_T - U_0\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right\}^2$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{\frac{m}{2U_0}}\,\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{E_T}{U_0} - \left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right\}^2}$$

Því er eðlilegast að nota víddarlausu breyturnar x/a og $\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\,\dot{x}$

og hlutfallið E_T/U_0 gefur heildarorkuna m.v. U_0

2



Dæmi 2

3

Ólínulegur sveifill með víddarlausa hreyfijöfnu

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 + x = 0$$

Notum hér greinireikning til að kanna eiginleika ferla hennar í fasarúminu $(x,\dot{x})$ en í næsta dæmi verða notaðar tölulegar aðferðir til að reikna þá.
Notum pólhnit, en breytum hreyfijöfnunni fyrst í hneppi fyrstastigs jafna

$$\begin{cases} y = \dot{x} \\ \dot{y} = -y^3 - x \end{cases}$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$r^2 = x^2 + y^2$

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} \qquad (*)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \qquad (**)$$

4

$$r^2\dot{\theta} \overset{(**)}{=} x\dot{y} - y\dot{x} \overset{\text{hneppi}}{=} -x(y^3 + x) - y^2$$

$$= -r^4\cos\theta\sin^3\theta - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\dot{\theta} = -\left[r^2\cos\theta\sin^3\theta + 1\right]}$$

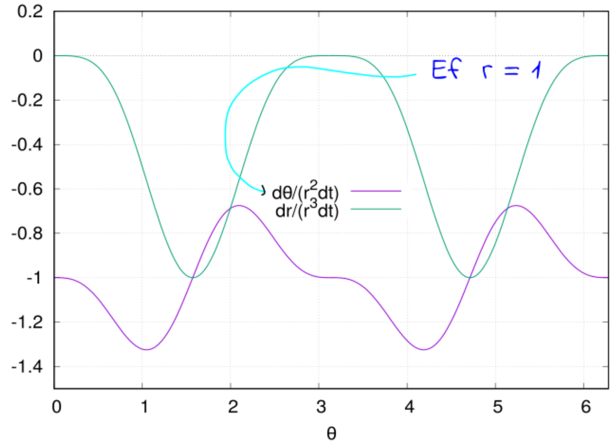
og með (*) fæst

$$r\dot{r} = xy + y(-y^3 - x) = -y^4 = -r^4\sin^4\theta$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\dot{r} = -r^3\sin^4\theta}$$

skoðum eiginleika þessara falla á næstu síðu

(5)



Hér sést að

$\dot{\theta} < 0$

hringsnúningur agnarinnar í fasarúminu er því alltaf réttsælis.

Eins sést að

$\dot{r} < 0$

(nema í punktum sem eru heilt margfeldi af π)

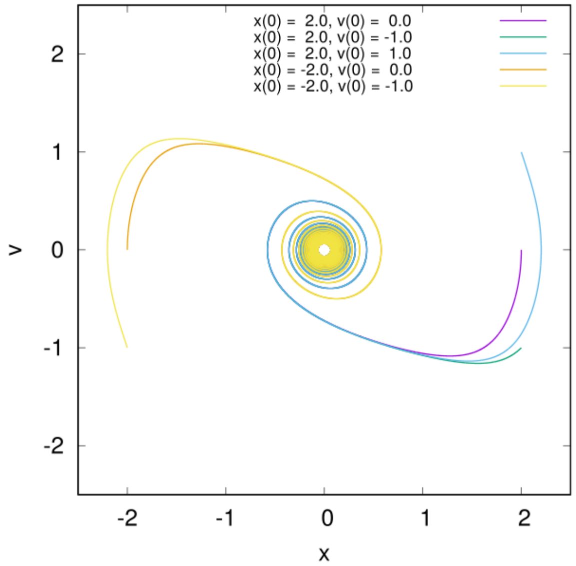
Ögnin mun því nálgast (0,0)-punktinn, en mjög hægt þar sem deyfingin í réttu hlutfalli við v^3 er mjög smá fyrir lítinn hraða.
Ég sé enga takmörkun fyrir r, sjáum myndir í næsta dæmi.

(6)

Dæmi 3

Beytum tölulegum aðferðum fyrir dæmi 2.
Hreyfijafnan er með víddarlausum stærðum $\ddot{x} + \dot{x}^3 + x = 0$

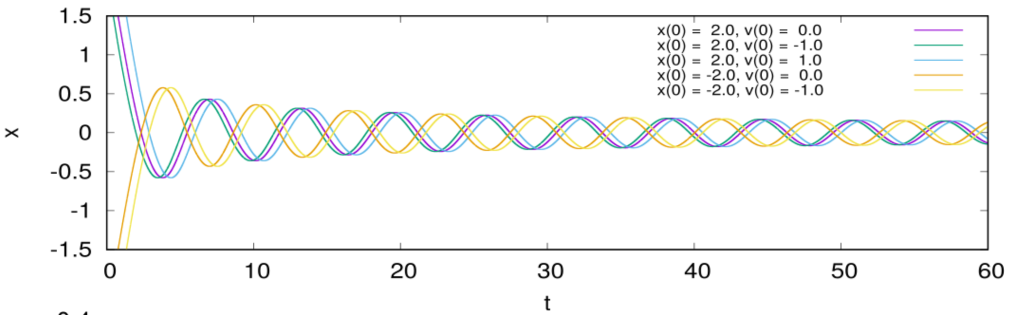
Ferlar í fasarúmi

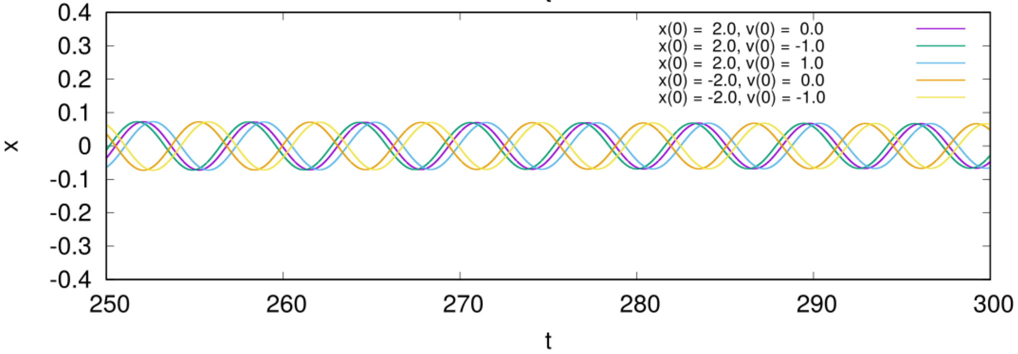


Hér sést réttsælis snúningurinn og hversu hægist á deyfingunni með minnkandi hraða

(7)

Eftirfarandi myndir sýna vel hvernig deyfingin minnkar með v og t





(8)

Dæmi 4

Athugum fasarúmsferla fyrir ögn í $U(x) = U_0\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right]^2$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -4\left(\frac{U_0}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right)\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right]$$

Bætum við viðnámskrafti

$$F(\dot{x}) = -mb\dot{x}$$

svo hreyfijafnan verður

$$m\ddot{x} + mb\dot{x} + 4\left(\frac{U_0}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right)\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right] = 0$$

veljum skölun $x/a = z$, $t\Omega = s$, $\Omega^2 = \frac{4U_0}{ma^2}$

$$\rightarrow \boxed{z'' + \frac{b}{\Omega} z' + z(z^2 - 1) = 0}$$

$z(s)$, $\frac{b}{\Omega}$

eini fastinn eftir

Skoðum 4 mismunandi tilfelli með $\dot{z}(0) = 0$