

EÐL302G Affræði

Sjúkra- og upptökupróf í janúar 2020. Kennari: Viðar Guðmundsson.

Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri, öll prentuð og skrifuð gögn og vasareiknivél.

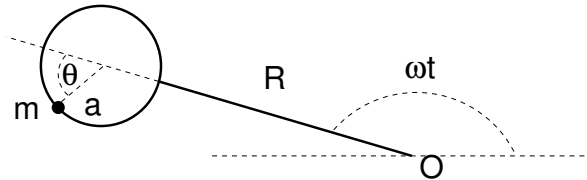
Í prófinu eru 5 verkefni sem öll vega jafnt. Leysa þarf fjögur þeirra. Skrifðu skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefni eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska:** Stöðuorka agnar með massa m í tvívíðu mætti og heimi er í pólhnitum $U(r) = -U_0 \ln [(r/a)^2 + 1]$, þar sem a og U_0 eru jákvæðir fastar.
 - (a) Finnið alhnit agnarinnar og fall Lagrange.
 - (b) Er eitthvert hnit rásað?
 - (c) Leiðið út hreyfijöfnu agnarinnar.
 - (d) Finnið fall Hamiltons fyrir ögnina. Munið að það er fall af alhnitum og alskriðþungum agnarinnar.
 - (e) Finnið hreyfijöfnurnar samkvæmt kórjöfnum Hamiltons.
 - (f) Lýsir fall Hamiltons heildaorku agnarinnar?

English: The potential energy of a particle with mass m in a two-dimensional world and potential in polar coordinates is $U(r) = -U_0 \ln [(r/a)^2 + 1]$, where a and U_0 are positive constants.

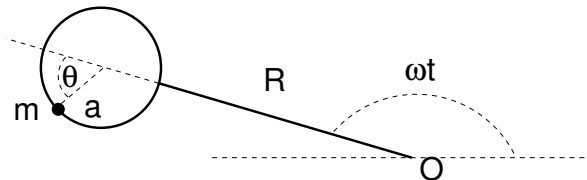
- (a) Find general coordinates for the particle and the Lagrangian.
- (b) Is there a cyclic coordinate?
- (c) Derive the equation of motion for the particle.
- (d) Find the Hamiltonian for the particle.
- (e) Find the equations of motion from the canonical equations of Hamilton.
- (f) Does the Hamiltonian describe the total energy of the particle.

2. **Íslenska:** Perla með massa m rennur án viðnáms á hringlaga gjörð með geisla a . Gjörðinni er komið fyrir á stöng með lengd R sem snýst með hornhraðanum ω í láréttu sléttu eins og myndin sýnir um punktinn O .



- Finnið fall Lagrange fyrir perluna.
- Leiðið út hreyfijöfnu perlunnar.
- Finnið jafnvægisstöðu perlunnar.
- Finnið tíðni smárra sveiflna fyrir perluna um jafnvægisstöðuna.

English: A bead with mass m slides without a friction on a hoop of radius a . The hoop is mounted on a stick with length R that rotates with the angular speed ω in a horizontal plane as the figure shows around the point O .



- Find the Lagrangian for the bead.
- Derive the equation of motion for the bead.
- Find an equilibrium position for the bead.
- Find the frequency of small oscillations for the bead around the equilibrium position.

3. **Íslenska:** Ögn með massa m er skorðuð til að fylgja braut í lóðréttri sléttu sem lýst er með fallinu $z = z_0 \ln [(x/x_0)^2 + 1]$, þar sem z_0 og x_0 eru jákvæðar stærðir. Þyngdarkraftur verkar á ögnina.

- (a) Finnið heppileg alhnit fyrir ögnina.
- (b) Finnið fall Lagrange fyrir ögnina.
- (c) Leiðið út hreyfijöfnur agnarinnar á brautinni.
- (d) Reiknið alkraftana sem verka á ögnina á hreyfingu hennar um brautina sem föll af staðsetningu hennar og hraða.

English: A particle m is constraint to move along a track in a vertical plane described by the function $z = z_0 \ln [(x/x_0)^2 + 1]$, where z_0 and x_0 are positive parameters. Gravitational force acts on the particle.

- (a) Find convenient generalized coordinates for the particle.
- (b) Find the Lagrangian for the particle.
- (c) Derive the equations of motion for the particle on the track.
- (d) Calculate the generalized forces acting on the particle during its motion on the track as functions of its position and the velocity.

4. **Íslenska:** Snúningspendúll er gerður úr stjarfhlut sem hengdur er upp í vír þannig að hann sveiflist ekki til, en snúist getur upp á hann og vegna efnis-eiginleika vírsins leitast stjarfhluturinn aftur í jafnvægisstöðu eins og venjulegur pendúll, vegna vægis en ekki krafts. Einfaldasta útgáfa hreyfijöfnunnar er $I\ddot{\theta} = -\kappa\theta$, þar sem κ er vægisstuðullinn, sambærilegur við kraftstuðulinn k sem einkennir venjulegan gorm sem fylgir Lögmáli Hooks.

- (a) Finnið sveiflutíma tenings með massa m og hliðlengd b sem hendur er upp á einu horninu í vír með lengd L .
- (b) Hvernig breytist sveiflutíminn þegar tengingurinn er hengdur upp í miðpunktum eins jaðarsins milli tveggja flata hans?

English: A torsional pendulum is made from a rigid body that is suspended from a wire such that it does not oscillate, but can turn and the material properties of the wire counteract it with a torque on the body that directs it back to the equilibrium position. In its simplest form the equation of motion is $I\ddot{\theta} = -\kappa\theta$, where κ is the torque coefficient comparable to the force coefficient k , characterizing a usual spring obeying Hooks law.

- (a) Find the oscillation period of a cube with mass m and side length b that is suspended from one corner from a wire with length L .
- (b) How does the period change when the cube is suspended from the midpoint of one of its edges?

5. **Íslenska:** Fall Lagrange sem lýsir einvíðu kerfi tveggja víxlverkandi agna er

$$L = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) - \frac{k}{2} (q_1^2 + q_2^2 + \alpha q_1 q_2 + \alpha q_2 q_1),$$

þar sem α er víddarlaus tengistuðull sem stýrir styrk víxlverkunar agnanna.

- (a) Finnið tíðni smárra sveiflna kerfisins.
- (b) Hver eru normalhnit kerfisins?
- (c) Lýsið normalháttum kerfisins.
- (d) Finnið lausn kerfisins fyrir upphafsgildin $q_1(0) = a, q_2(0) = 0, \dot{q}_1(0) = 0, \dot{q}_2(0) = v_0$, þar sem a og v_0 eru fastar.

English: The Lagrangian for a one-dimensional system of two interacting particles is

$$L = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) - \frac{k}{2} (q_1^2 + q_2^2 + \alpha q_1 q_2 + \alpha q_2 q_1),$$

where α is a dimensionless coupling coefficient governing the strength of the interaction of the particles.

- (a) Find the frequencies for small oscillations in the system.
- (b) What are the normal coordinates of the system?
- (c) Describe the normal modes of the system.
- (d) Find the solution for the system for the initial values $q_1(0) = a, q_2(0) = 0, \dot{q}_1(0) = 0, \dot{q}_2(0) = v_0$, where a and v_0 are constants.