

09.21.54 Skammtafræði I

Fimmtudaginn 12. desember 1996, kl. 9-13.

Leyfileg hjálpargögn eru: Vasatölva, allar bækur, nótur og dæmi.

1. Tvívíðum hreintóna sveifli er lýst með Hamiltonvirkjanum

$$H_0 = \hbar\omega (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1).$$

Tröppuvirkjarnir a_i og a_i^\dagger uppfylla víxlin $[a_i, a_i^\dagger] = 1$.

- (a) Reiknið áhrif tímaóháðu truflunarinnar

$$H_{int} = \lambda (a_1^\dagger a_1^\dagger a_2 a_2 + a_2^\dagger a_2^\dagger a_1 a_1)$$

á annað og þriðja örvaða ástand sveifilsins.

- (b) Hvers vegna getum við útilokað truflun þar sem aðeins annar liðurinn hér að ofan með fjórum tröppuvirkjum kemur fyrir.

2. Atóm hefur tvö orkustig, $|1\rangle$ með orkuna $-\hbar\Omega_0$ og $|2\rangle$ með orkuna $+\hbar\Omega_0$. (Atómið hefur fleiri orkustig sem koma ekki við sögu hér). Truflun, $V(t)$, sem kveikt er á klukkan $t = 0$ tengir þessi tvö orkustig þannig að

$$\langle 1|V(t)|2\rangle = \hbar\Omega_1 \sin(\omega t).$$

- (a) Finnið líkan (Hamiltonvirkja) sem lýst getur þessu kerfi.
- (b) Ef kerfið er upphaflega í grunnástandinu, metið líkur þess að það verði í örvaða ástandinu klukkan t .
- (c) Ef kerfið er upphaflega í ástandinu $(|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$, metið líkur þess að það verði í grunnástandinu klukkan t .

3. Ögn með massa m er í mættinu

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{ef } 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{ef } x < 0 \quad \text{eða } x > a. \end{cases}$$

Eiginástönd kerfisins eru $|\phi_n\rangle$ með orkuna $E_n = (n\pi\hbar)^2/(2ma^2)$ fyrir $n = 1, 2, \dots$. Klukkan $t = 0$ er kerfið í ástandinu

$$|\psi(o)\rangle = a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle + a_3|\phi_3\rangle + a_4|\phi_4\rangle,$$

þar sem $a_i \in \mathbf{C}$.

- Hver eru líkindi þess að orkumæling á ögninni í ástandinu $|\psi(o)\rangle$ gefi gildi sem er lægra en $(3\pi^2\hbar^2)/(ma^2)$?
- Hvert er væntigildi orku agnarinnar í ástandinu $|\psi(o)\rangle$?
- Finnið $|\psi(t)\rangle$. eru svörin í lið (a) og (b) háð eða óháð tíma?
- Orkumæling gefur gildið $(8\pi^2\hbar^2)/(ma^2)$. Hvert er ástand agnarinnar eftir mælinguna? Hvaða orkugildi fengist með endurtekinni mælingu?

4. Straumi agna með massa m er beint að kúlusamhverfa skammseilna skotmarkinu

$$V_0(r) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{a}{r^2} \delta(r - a).$$

- Notið hlutbylgjugreiningu til að reikna fasavik s -bylgjudreifingarinnar.
- Hvert er heildarþversnið skotmarksins fyrir s -bylgju?
- Hvert er diffurþversnið skotmarksins fyrir s -bylgju?
- Hvert er diffurþversnið skotmarksins samkvæmt Bornnálgun?
- Fyrir hvaða orkubil gilda þessar tvær nálganir? Rökstyðjið svarið.
- Finnið fasavik s -bylgjudreifingarinnar fyrir mættið

$$V_0(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{a}{r^2} \delta(r - a).$$

- Hvert er eðlisfræðilega túlkun niðurstaðnanna í lið (a) og (f)?