

## 09.21.54 Skammtafræði I

Laugardaginn 9. desember, kl. 14-18.

**Leyfileg hjálpargögn eru: Vasatölva, allar bækur, nótur og dæmi.**

1. Hreintóna sveifli er lýst með Hamiltonvirkjanum

$$H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right).$$

Tröppuvirkjarnir  $a$  og  $a^\dagger$  uppfylla víxlin  $[a, a^\dagger] = 1$ .

- (a) Finnið tímaþróun lækkunarvirkjans (eða eyðingarvirkjans)  $a$  með því að reikna beint

$$a(t) = \exp(iHt/\hbar) a \exp(-iHt/\hbar).$$

Hér er gert ráð fyrir því að  $a(0) = a$ .

- (b) Berið svarið saman við niðurstöðuna sem fæst með því að leysa jöfnu Heisenbergs fyrir virkjann  $a$

$$i\hbar \frac{d}{dt} a = [a, H].$$

2. Hægt er að meta orku grunnástands Vetrnisatómsins með því að nota kúlusamhverfu hnikunarföllin

$$\phi_\alpha(r) = \begin{cases} C \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right) & \text{ef } r \leq \alpha \\ 0 & \text{ef } r > \alpha, \end{cases}$$

þar sem  $C$  er stöðlunarfasti og  $\alpha$  er hnikunarfasti.

- (a) Finnið væntigildi stöðuorkunar og hreyfiorkunar fyrir ástandið  $|\phi_\alpha\rangle$ . Hér er nauðsynlegt að tákna væntigildi hreyfiorkunar með

$$\langle K \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3r (\vec{\nabla} \phi_\alpha)^* \cdot (\vec{\nabla} \phi_\alpha).$$

- (b) Finnið  $\alpha_0$ , gildið á  $\alpha$  sem gefur bestu orku grunnástandsins. Berið  $\alpha_0$  saman við geisla Bohrs  $a_0$ .
- (c) Berið nálgunargildið á orku grunnástandsins saman við rétt gildi.
3. Eind með massa  $\mu$  getur aðeins hreyfst í hring með fastan geisla  $\rho$  í  $x$ - $y$ -sléttunni. Bylgjufall eindarinnar  $\psi$  er aðeins háð horninu  $\alpha$  sem er mælt frá  $x$ -ásnum í jákvæða snúningsátt. Bylgjufallið er einhlítt, því verður að gilda að  $\psi(\alpha + 2\pi) = \psi(\alpha)$ . Bylgjuföllin eru stöðluð á hringnum.

- (a) Athugið virkjann

$$M = -i\hbar \frac{d}{d\alpha}.$$

Er hann sjálfoka? Finnið eigingildi og stöðluð eiginföll  $M$ . Hvaða eðlisfræðilega merkingu hefur  $M$ ?

- (b) Hreyfiorka eindarinnar er  $H_0 = M^2/(2\mu\rho^2)$ . Finnið eigingildi og eiginföll  $H_0$ . Eru þau margföld?
- (c) Klukkan  $t = 0$  er bylgjufall eindarinnar  $N \cos^2 \alpha$  ( $N$  er stöðlunarfasti). Hvað er hægt að segja um staðsetningu eindarinnar fyrir  $t > 0$ .
- (d) Eindin hefur hleðslu  $q$  og víxlverkar við fast einsleitt rafsvið  $\mathcal{E}$  samhliða  $x$ -ásnum. Víxlverkuninni er lýst með Hamiltonvirkjanum  $W = -q\mathcal{E}\rho \cos \alpha$ . Hvert er nýja bylgjufall grunnástandsins með tilliti til  $\mathcal{E}^1$ , ( $\psi_{\mathcal{E}}(\alpha) + o(\mathcal{E}^2)$ )?
4. Kerfi er lýst með Hamiltonvirkjanum  $H_0 = \Omega J_z$ , þar sem  $J_z$  er  $z$ -þáttur hverfþunga með skammtöluna  $j = 1$ . Ástandsvigra kerfisins má tákna með  $|-\rangle$ ,  $|0\rangle$  og  $|+\rangle$ . Kerfið verður fyrir tímaháðri truflun  $W(t) = \omega J_x \theta(t)$ , þar sem  $\theta(t)$  er þrepafall Heavisides.

- (a) Hver eru eigingildi  $H_0$ ?
- (b) Ef upphafsástand kerfisins er  $|\psi(0)\rangle = \alpha|-\rangle + \beta|+\rangle$  hver eru þá líkindi þess að finna kerfið í eiginástandinu  $|0\rangle$  klukkan  $t > 0$ ? ( $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ ). Notið fyrstastigs tímaháðan truflanareikning.
- (c) Hvernig er hægt að finna líkindin í liðnum hér á undan nákvæmlega?