

EÐL306G: Inngangur að skammtafræði

Sjúkra- og endurtökupróf fimmtudaginn 24. maí 2012 klukkan 09:00-12:00. Kennari: Viðar Guðmundsson.

Hjálpargögn: Kennslubókin „Introduction to Quantum Mechanics“ eftir David J. Griffiths, handskrifaðar nótur nemenda og kennara, reiknivélar. Leyfilegt er að hafa með sér stærðfræðihandbók.

Vægi verkefnanna er jafnt. Skriðið skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefni eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska:** Hreintóna sveifill með grunntíðni ω er í ástandi sem lýst er sem samantekt tveggja eiginástanda hans

$$|\psi\rangle = A \{|0\rangle + i|2\rangle\}.$$

- (a) Finnið $\langle x \rangle$ og $\langle p \rangle$.
- (b) Reiknið staðalfrávik x og p .
- (c) Hver er merking staðalfráviks virkja?
- (d) Hvert er væntigildi orkunnar, (Hamiltonvirkjans)?
- (e) Hvað gerist við orkumælingu á ástandinu $|\psi\rangle$ og með hvaða líkum?

English: A harmonic oscillator with fundamental frequency ω is in a mixed state of two of its eigenstates

$$|\psi\rangle = A \{|0\rangle + i|2\rangle\}.$$

- (a) Find $\langle x \rangle$ and $\langle p \rangle$.
- (b) Calculate the standard deviations for x and p .
- (c) What is the meaning of the standard deviation of an operator?
- (d) What is the expectation value of the energy, (the Hamiltonian)?
- (e) What happens when the energy of $|\psi\rangle$ is measured and with what probability?

2. **Íslenska:** Tvær fermíeindir eru í ytra einvíðu fleygbogamætti.

- (a) Skrifðu niður staðlaða bylgjufall grunnástandsins ef þær eru spinlausar.
- (b) Skrifðu niður staðlaða bylgjufall grunnástandsins ef þær eru rafeindir með hálfþöluspuna.

English: Two fermions are in a one-dimensional external parabolic potential.

- (a) Write down the normalized wavefunction of the their groundstate if they are spinless.
- (b) Write down the normalized wavefunction of the their groundstate if they are electrons with spin 1/2.

3. **Íslenska:** Þrístiga kerfi er lýst með Hamiltonvirkjanum

$$H = H_0 + \lambda H_1 = \hbar\Omega \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

- (a) Finnið eiginástönd og orkuróf H_0 .
- (b) Finnið nákvæmt orkuróf H .
- (c) Notið fyrsta- og annarsstigs truflanafræði fyrir stök ástönd til þess að finna nálgun fyrir eigingildi þess ástands sem á uppruna sinn í einfalda ástandi H_0 .
- (d) Notið truflanafræði fyrir margföld ástönd til þess að finna fyrstastigs nálgun fyrir orku ástandanna sem eru upprunalega tvöföld.

English: A three level system is described by the Hamiltonian

$$H = H_0 + \lambda H_1 = \hbar\Omega \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

- (a) Find the eigenstates and spectrum of H_0 .
- (b) Find the exact energy spectrum of H .
- (c) Use first- and second order nondegenerate perturbation theory to find the approximate eigenvalue for the state that originates in the nondegenerate eigenstate of H_0 .
- (d) Use degenerate perturbation theory to find the first-order correction to the two initially degenerate eigenvalues.

4. **Íslenska:** Notið hníkareikning til þess að finna nálgun á orku grunnástands einvíða mættisins

$$V(x) = \alpha|x|.$$

Hvað er hægt að segja um stærð rétta gildisins miðað við nálgunargildið?

English: Use variational calculus to estimate the energy of the groundstate of the potential

$$V(x) = \alpha|x|.$$

What can be said about the value of the true groundstate with respect to the approximate one?

5. **Íslenska:** Hugsum okkur einsátta hreintóna sveifil í þremur víddum lýst með H . Sýnið að fyrir hann gildi $[H, \mathbf{L}] = 0$, þar sem \mathbf{L} er hverfþungavirkinn. Hvaða afleiðingar hefur þetta fyrir eiginástönd H ? Eru líkindadreifingar eiginástanda H kúlusamhverfar? Hvers vegna, eða hvers vegna ekki?

English: Consider an isotropic three-dimensional harmonic oscillator described by H . Show that $[H, \mathbf{L}] = 0$, where \mathbf{L} is the operator for the angular momentum. What are the consequences for the eigenstates of H ? Are the probability distributions for the eigenstates of H spherical symmetric? Why, or why not?