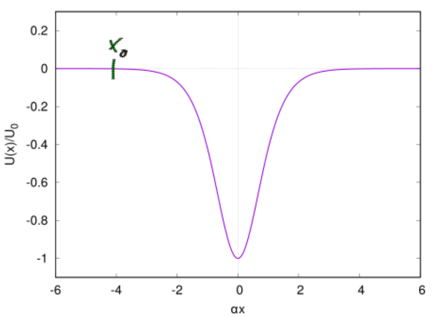
1

Dæmi 1

Kraftsvið sem lýst er með mættinu U(x)

$$U(x) = -U_0/\cosh^2(\alpha x)$$



1. Búumst við lotubundinni hreyfingu, sveiflu, skoðum
2. Finnum tímann úr kyrrstöðu í x_0 niður í $x=0$, $\tau = t - t_0$

Notum heildarorkuna

$$E = T + V = \frac{m}{2}v^2 + U(x)$$

$$\frac{m}{2}v^2 = E - U(x)$$

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\{E - U(x)\}$$

og því

$$dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\{E - U(x)\}}}$$

og

$$\tau = t - t_0 = -\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\int_{x_0}^{0}\frac{A\cosh(\alpha x)\,dx}{\sqrt{-\cosh^2(\alpha x) + A^2}}$$

þar sem

$$A = \cosh(\alpha x_0)$$

Takið eftir að stæðan innan rótarinnar er jákvæð, eins og best sést af myndinni. Heildið sjálft er jákvætt þar sem cosh(x) er alltaf jákvætt.

2

Hægt að heilda beint með GS: 2.462.11, en veljum breytuskipti til að fá heildi sem við þekkjum betur

$$\sinh(\alpha x) = z, \quad \alpha x = \mathrm{ArSinh}\, z$$

$$\cosh(\alpha x) = \cosh\{\mathrm{ArSinh}\, z\} = \sqrt{z^2+1} \longrightarrow \cosh^2(\alpha x) = z^2 + 1$$

Heildið verður því

$$\tau = -\frac{A}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\int_{\sinh(\alpha x_0)}^{0}\frac{dz}{\sqrt{A^2 - z^2 - 1}}$$

Notum GS 2.261 með $c = -1,\ b = 0,\ a = A^2 - 1$

$$\Delta = 4ac - b^2 = -4(A^2 - 1) < 0$$

$$\tau = \frac{A}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\left\{\arcsin\left(\frac{-2z}{2\sqrt{A^2-1}}\right)\Bigg|_{\sinh(\alpha x_0)}^{0}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned}\Delta &= -4(A^2 - 1) = -4\{\cosh^2(\alpha x_0) - 1\} \\ &= -4\sinh^2(\alpha x_0) < 0 \quad \text{ef} \quad x_0 \neq 0\end{aligned}\right\}$$

3

því fæst

$$\tau = \frac{A}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\left\{\arcsin(0) - (-\arcsin(1))\right\} = \frac{A}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\,\frac{\pi}{2}$$

Því er

$$\boxed{\tau = t - t_0 = \frac{A\pi}{2\alpha}\sqrt{\frac{m}{2U_0}} = \frac{\pi}{2\alpha}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\cosh(\alpha x_0)}$$

3. Lota sveiflunar er ferfaldur þessi tími. Hún er því háð útslagi sveiflunnar, öfugt hreintóna sveifil. Lotan nálgast óendanlegt þegar útslagið vex og orkan stefnir á 0.

4. Ef hreyfingin hefst án hraða í x_0, en endar í $x_f \neq 0$ þá fæst

$$\tau' = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\left\{-\arcsin\left[\frac{\sinh(\alpha x_f)}{\sinh(\alpha x_0)}\right] + \frac{\pi}{2}\right\}\cosh(\alpha x_0)$$

þessi tími er háður upphafsstaðsetningunni á flókinn hátt en við sjáum hvernig það einfaldast þegar loka staðsetningin er x=0

4

Dæmi 2

Einvíð hreyfing, viðnámskraftur $f = -mk(v^2 + \beta v)$

Hreyfijafna

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = -mk(v^2 + \beta v)}$$

Upphafshraði: $v_0 > 0$ í $t = 0$, heildum

$$\int_{v_0}^{v(t)}\frac{dv}{v^2 + \beta v} = -k\int_0^t dt'$$

notum GS 2.1181 og maxima

$$\int\frac{dx}{xz_1} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{z_1}{x}\right)$$

$$z_1 = a + bx, \quad a = \beta, \quad b = 1$$

$$-kt = -\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{v+\beta}{v}\right]\Bigg|_{v_0}^{v(t)}$$

$$= -\frac{1}{\beta}\ln\left\{\frac{v(t)+\beta}{v(t)}\right\} + \frac{1}{\beta}\ln\left\{\frac{v_0+\beta}{v_0}\right\}$$

$$= \frac{1}{\beta}\ln\left\{\frac{v_0+\beta}{v_0}\cdot\frac{v(t)}{v(t)+\beta}\right\}$$

$$\to e^{-\beta k t} = \frac{v_0+\beta}{v_0}\,\frac{v(t)}{v(t)+\beta} \quad\to\quad \frac{v_0}{v_0+\beta}\,e^{-\beta k t} = \frac{1}{1+\beta/v(t)}$$

og

$$\frac{\beta}{v(t)} = \frac{v_0+\beta}{v_0}\,e^{+\beta k t} - 1 \quad \text{eða} \quad \boxed{v(t) = \frac{v_0\beta}{(v_0+\beta)e^{\beta k t} - v_0}}$$

Betra að sannreyna að $v(0) = \dfrac{v_0\beta}{v_0+\beta-v_0} = v_0$

Einnig sést að $v(t\to\infty) \to 0$

Við drögum því þá ályktun að það taki ögnina óendanlegan langan tíma að stöðvast.
Það notum við í næsta lið þegar við finnum hve langt ögnin kemst.

Finnum vegalengdina sem ögnin kemst

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = \frac{v_0\beta}{(v_0+\beta)e^{\beta k t} - v_0} \quad\to\quad dx = \frac{v_0\beta\, dt}{(v_0+\beta)e^{\beta k t} - v_0}$$

sem má heilda sem

$$x = \int_0^t \frac{v_0\beta\, ds}{(v_0+\beta)e^{\beta k s} - v_0} = -\frac{1}{k}\left\{\beta k s - \ln\left[(v_0+\beta)e^{\beta k s} - v_0\right]\right\}\Big|_0^t$$

$$= -\frac{1}{k}\left\{\beta k t - \ln\left[(v_0+\beta)e^{\beta k t} - v_0\right] + \ln\beta\right\}$$

$$= \frac{1}{k}\ln\left\{\frac{v_0+\beta}{\beta}e^{\beta k t} - \frac{v_0}{\beta}\right\} - \beta t$$

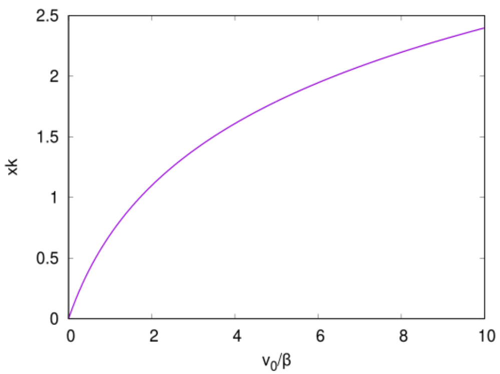
$$= \frac{1}{k}\ln\left\{e^{\beta k t}\left[\frac{v_0+\beta}{\beta} - \frac{v_0}{\beta}e^{-\beta k t}\right]\right\} - \beta t$$

Því fæst

$$x(t) = \frac{1}{k}\ln\left\{\frac{v_0+\beta}{\beta} - \frac{v_0}{\beta}e^{-\beta k t}\right\}$$

og markgildið

$$\boxed{x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_0+\beta}{\beta}\right)} \qquad \text{vídd } [k] = \frac{1}{L}$$

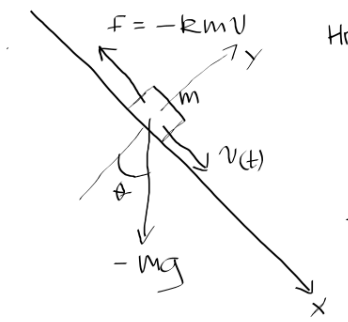


svo ögnin kemst aðeins endanlega lengd á óendanlegum tíma

Hér er ekki hægt að athuga markgildið þegar β stefnir á 0, heildið sem valið var í upphafi leyfir það ekki.

Dæmi 3

Skáplan í föstu þyngdarsviði, ögn rennur af stað úr kyrrstöðu, hve langan tíma þarf hún til að fara d



Hreyfijafnan er

$$\boxed{m\ddot{x} = mg\sin\theta - kmv}$$

$$\to \frac{dv}{dt} = g\sin\theta - kv$$

$$\to \boxed{\frac{dv}{g\sin\theta - kv} = dt}$$

Breytistærðir aðgreindar, heildum, v(t=0) = v(0) = 0

$$\int_0^t dt' = \int_0^{v(t)} \frac{dv}{g\sin\theta - kv}$$

hraði agnarinnar mun aukast niður eftir skáplaninu

$$\to g\sin\theta > kv$$

9

Því fæst

$$t = \frac{1}{k}\ln\left[\frac{g\sin\theta}{g\sin\theta - kv}\right] \rightarrow e^{kt} = \frac{1}{1-\frac{kv}{g\sin\theta}}$$

og

$$e^{-kt} = 1 - \frac{kv}{g\sin\theta} \rightarrow kv = g\sin\theta\left\{1-e^{-kt}\right\}$$

þessa jöfnu má sannreyna fyrir lítið kt

sem má umrita sem

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{g\sin\theta}{k}\left\{1-e^{-kt}\right\}} \rightarrow \int_0^d dx = \frac{g\sin\theta}{k}\int_0^t ds\left\{1-e^{-ks}\right\}$$

sem leiðir til

$$d = \frac{g\sin\theta}{k}\left\{t + \frac{e^{-kt}}{k} - \frac{1}{k}\right\} \rightarrow (kt + e^{-kt}) = 1 + \frac{k^2 d}{g\sin\theta}$$

10

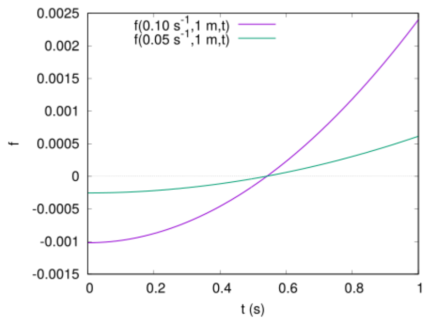
Umskrifum sem

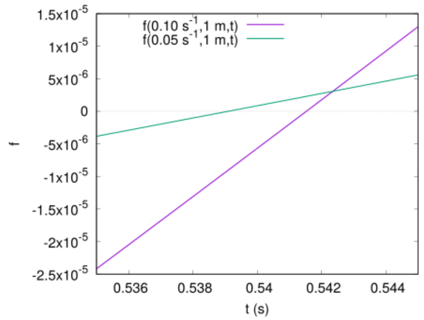
$$\frac{k^2 d}{g} = \left\{(kt + e^{-kt}) - 1\right\}\sin\theta$$

og skilgreinum fall

$$f(k,d,t) = \left\{(kt + e^{-kt}) - 1\right\}\sin\theta - \frac{k^2 d}{g}$$

Veljum $g = 9.82\ m/s^2,\ \theta = 45^\circ$





11

Eins má nota wxmaxima til að finna núllstöðvarnar, athugum aðeins svarið

$$(kt + e^{-kt}) = 1 + \frac{k^2 d}{g}\frac{1}{\sin\theta}$$

Liðum fyrir lítið kt

$$kt + 1 - kt + \frac{(kt)^2}{2} + \dots = 1 + \frac{k^2 d}{g\sin\theta}$$

$$\rightarrow \boxed{t^2 = \frac{2d}{g\sin\theta}} \quad \text{þegar} \quad kt \rightarrow 0$$

Þetta er svarið sem fengist þegar enginn viðnámskraftur væri

12

Dæmi 4 GS: 2.132.1

Fall úr kyrrstöðu

z

$$F = m\frac{dv}{dt} = mg - m\gamma v^4$$

① Nákvæm lausn, heildum

$$\int_0^t dt' = \int_0^v \frac{dv'}{-\gamma v'^4 + g}$$

$$\boxed{t = \frac{\alpha}{4g}\left[\ln\left[\frac{v+\alpha}{v-\alpha}\right] + 2\arctan\left(\frac{v}{\alpha}\right)\right]}$$

$$\alpha = \left(\frac{g}{\gamma}\right)^{1/4}$$

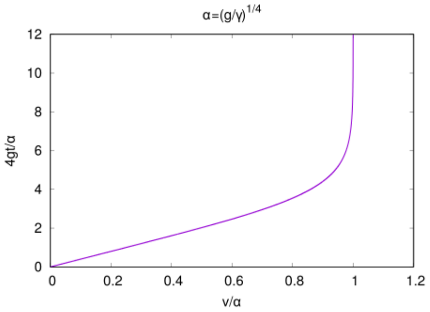
② Markgildi, $\left(\frac{v}{\alpha} \rightarrow 0\right)$ $\gamma \rightarrow 0$

Erfitt er að kanna markgildið þegar γ stefnir á 0, þar sem heildið var gert með þeim formerkjum að $-g\gamma < 0$, sem er þá ekki uppfyllt. Því bendi ég á næsta lið. Grafið þar sýnir einfalt samband v og t þegar v/α er lítið.

3 Nákvæma lausnin var

$$t = \frac{\alpha}{4g}\left[\ln\left[\frac{v+\alpha}{v-\alpha}\right] + 2\arctan\left(\frac{v}{\alpha}\right)\right]$$

Já, þetta má lesa úr lausninni með greiningu, en einfaldlega notum graf



Hraðinn vex greinilega ekki endalaust með t, markhraðinn virðist vera

$$\boxed{v_m = \alpha = \sqrt[4]{\frac{g}{\gamma}}} \leftarrow 4$$

5

Markhraðinn lýsir sístæðu ástandi

$$\longrightarrow \frac{dv}{dt} = 0$$

svo hreyfijafnan verður

$$0 = mg - m\gamma v^4$$

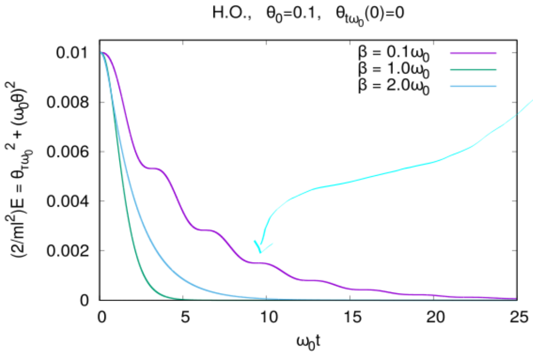
sem gefur nákvæmlega sama markhraðan og í liðnum á undan

Dæmi 1 1D, undirdeyfður línulegur sveifill í gang klukka t=0 (1)

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2, \quad k = m\omega_0^2$$

$$x(t) = A e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos(\omega_1 t + \beta), \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2$$

$$\dot{x}(t) = -A e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[\omega_1 \sin(\omega_1 t - \beta) + \frac{\Gamma}{2}\cos(\omega_1 t - \beta)\right]$$



Rifjum upp, að orkutapið er flókið fall af tíma innan hverrar lotu þ.s. hraðinn innan lotu er breytilegur

En hér viljum við reikna meðal orkutapið yfir lotu

(2)

$$\langle E(t)\rangle = \left\langle \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2(t)\right\rangle$$

$$= A^2 e^{-\Gamma t}\left\langle\left[\left(\omega_1 \sin B + \frac{\Gamma}{2}\cos B\right)^2 \frac{m}{2} + \omega_0^2 \cos^2 B \cdot \frac{m}{2}\right]\right\rangle$$

með

$$B = (\omega_1 t + \beta)$$

og við leyfum okkur að taka aðeins tíma meðaltal yfir eina lotu af lotubundnum liðum

$$\langle E(t)\rangle = A^2 e^{-\Gamma t}\left\langle\left\{\omega_1^2 \sin^2 B \cdot \frac{m}{2} + \omega_0^2 \cos^2 B \cdot \frac{m}{2} + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 \cos^2 B \cdot \frac{m}{2} + \omega_1 \Gamma \sin B \cos B \cdot \frac{m}{2}\right\}\right\rangle$$

Síðan tínum við saman meðaltölin

vitum að orkan fellur með veldisvísisfalli og gætum því hugsað okkur meðaltalið af $e^{+\Gamma t}E(t)$

(3)

$$\langle \sin^2 B\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt \, \sin^2(\omega_1 t + \beta), \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$= \frac{\omega_1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} dt \, \sin^2(\omega_1 t + \beta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} du \, \sin^2(u + \beta)$$

$$= \frac{1}{2}$$ óháð β þar sem fallið er lotubundið

Sama svar fæst fyrir cos²(B), en fyrir blandaða liðinn sinB*cos(B) fæst 0 því fæst

$$\boxed{\langle e^{\Gamma t}E(t)\rangle = \frac{A^2 m}{4}\left\{\omega_1^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \omega_0^2\right\} = E_0}$$

(4)

Algengt er að rekast á tvenns konar skilgreiningar á gæðastuðli Q, tap á radíana:

$$Q = \frac{E_0 e^{-\Gamma t}}{|\Delta E|},$$ með ΔE tap á radíana

$$\Delta E = \frac{d\left[e^{-\Gamma t}\langle e^{\Gamma t}E(t)\rangle\right]}{d(t\omega_1)} = -\frac{\Gamma}{\omega_1}e^{-\Gamma t}E_0$$

og því

$$\boxed{Q = \frac{\omega_1}{\Gamma}}$$

því verður Q hærra eftir því sem tapið er minna

Önnur algeng leið til að meta Q er að spyrja um tapið á lotu í stað á radíana. Það eru 2π radíanar í lotu svo þá fengist

$$\boxed{Q = \frac{\omega_1}{2\pi\Gamma} = \frac{f_1}{\Gamma}}$$

Fleiri skilgreiningar eru til

5

Dæmi 2

Þvingaður ódeyfður línulegur sveifill er athyglisvert kerfi

1 $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \theta(t)\, F_0 \sin(\omega t)/m$$

$x(0) = 0$
$v(0) = 0$
$\theta(t)$: Heaviside þrepafall

Finnum lausn, fyrir óhliðruðu jöfnuna

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$$

og tökum eina sérstaka lausn fyrir hliðruðu jöfnuna

$$C\sin(\omega t) \longrightarrow \{-m\omega^2 + m\omega_0^2\}C = F_0 \quad (*)$$

(innsetning)

Heildarlausnin er því

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega t)$$

$$0 = B\cos(\omega_0 t) \longrightarrow B = 0$$

$$0 = A\omega_0 + C\omega \longrightarrow A\omega_0 = -C\omega$$

6

því fæst

$$A = -\frac{F_0\omega}{m\omega_0}\,\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Lausnin verður því

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0(\omega_0 + \omega)}\left[\frac{\omega_0\sin(\omega t) - \omega\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 - \omega}\right]}$$

2 Markgildið þegar $\omega \to \omega_0$

$$\lim_{\omega \to \omega_0}\left[\frac{\omega_0\sin(\omega t) - \omega\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 - \omega}\right]$$

$$= \lim_{\delta \to 0}\left[\frac{\omega_0\sin((\omega_0+\delta)t) - (\omega_0+\delta)\sin(\omega_0 t)}{-\delta}\right] = \sin(\omega_0 t) - \omega_0 t\cos(\omega_0 t)$$

7

og lausnin verður

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0^2}\left\{\sin(\omega_0 t) - (\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\right\}}$$

Takið eftir þættinum með línulegum vexti

3 Hvernig vex orka kerfisins í hermunni án deyfingar?

$$\dot{x} = \frac{F_0}{2m\omega_0^2}\left[\omega_0\cos(\omega_0 t) - \omega_0\cos(\omega_0 t) + (\omega_0 t)\omega_0\sin(\omega_0 t)\right]$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_0^2}(\omega_0 t)\,\omega_0\sin(\omega_0 t)$$

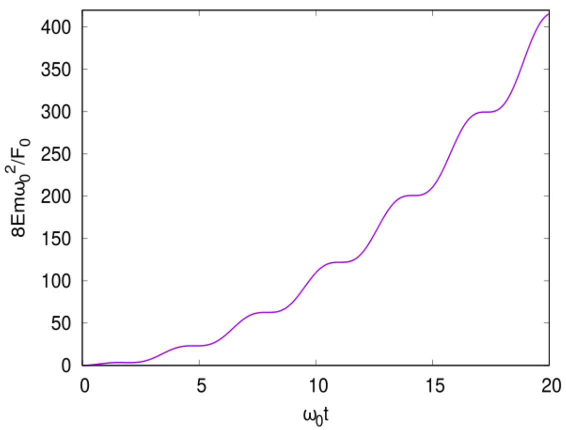
og orkan verður

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{F_0}{2m\omega_0^2}\right)^2\Big\{(\omega_0 t)^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) + \omega_0^2\left[\sin(\omega_0 t) - (\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\right]^2\Big\}$$

8

Að lokum fæst því fyrir orkuna

$$\boxed{E = \frac{F_0^2}{8m\omega_0^2}\left[(\omega_0 t)^2 + \sin^2(\omega_0 t) - 2(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)\right]}$$



Orkan vex í öðruveldi með tímanum, og vöxturinn er í réttu hlutfalli við styrk þvingunarinnar

Dæmi 3

Finna lausn á markdeyfðum línulegum sveifli

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \beta^2 x = 0}, \quad \text{því} \quad \omega_0^2 = \beta^2$$

1. Reynum lausn: $x(t) = y(t)e^{-\beta t}$

$$\dot{x} = \dot{y}e^{-\beta t} - \beta y e^{-\beta t} = e^{-\beta t}[\dot{y} - \beta y]$$

$$\ddot{x} = -\beta e^{-\beta t}\{\dot{y} - \beta y\} + e^{-\beta t}\{\ddot{y} - \beta\dot{y}\} = e^{-\beta t}[\ddot{y} - 2\beta\dot{y} + \beta^2 y]$$

Setjum inn í hreyfijöfnuna

$$e^{-\beta t}[\ddot{y} - 2\beta\dot{y} + \beta^2 y + 2\beta\dot{y} - 2\beta^2 y + \beta^2 y] = 0$$

$$\rightarrow \ddot{y} = 0$$

með lausn $y = A + Bt$ $\rightarrow$ $\boxed{x(t) = \{A + Bt\}e^{-\beta t}}$

2. Margar aðferðir, reynum ummyndun Laplace

$$\boxed{\begin{aligned} f(s) &= \int_0^\infty dt\, f(t)\, e^{-st} \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} ds\, f(s)\, e^{st} \end{aligned}}$$

Á vel við föll á bilinu

$$t \in [0, \infty)$$

Mun koma fyrir í Greiningu III, ágætt að kynnast hér.
Á vel við kerfi með dofnun

$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \beta^2 x = 0$ varpast í

$$[s^2 x(s) - s x(0) - \dot{x}(0)] + 2\beta[s x(s) - x(0)] + \beta^2 x(s) = 0$$

Algebraísk jafna með lausn

$$\boxed{x(s) = \frac{\dot{x}(0) + (s + 2\beta)x(0)}{(s + \beta)^2}}$$

Ummyndum til baka, ágætt að nota töflur á vef eða wxmaxima

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \dot{x}(0)\, t e^{-\beta t} + \beta t e^{-\beta t} x(0) + e^{-\beta t} x(0) \\ &= e^{-\beta t}\{x(0) + t(\dot{x}(0) + \beta x(0))\} \end{aligned}}$$

Við getum tengt við stuðlana A og B í lausninni með hinni aðferðinni

$$x(0) = A$$

$$\dot{x}(0) = -A\beta + B$$

Deyfður sveifill er ekki hreintóna kerfi. Ummyndanir Fouriers eða Laplace gefa okkur til kynna hvaða tíðnir finnast í kerfinu vegna deyfingarinnar

Dæmi 4

Deyfður og þvingaður línulegur sveifill, 4. fyrirlestur bls. 8

Í sístæðu ástandi

$$\langle T\rangle = \frac{mA^2}{4}\frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}$$

$$\omega_n = 2^n\omega_0$$
$$\omega_{-n} = 2^{-n}\omega_0$$

$$\langle T\rangle_n = \frac{mA^2}{4}\frac{2^{2n}\omega_0^2}{(\omega_0^2 - 2^{2n}\omega_0^2)^2 + 4\,2^{2n}\omega^2\beta^2}$$

$$\langle T\rangle_{-n} = \frac{mA^2}{4}\frac{2^{-2n}\omega_0^2}{(\omega_0^2 - 2^{-2n}\omega_0^2)^2 + 4\,2^{-2n}\omega^2\beta^2}$$

$$\langle T\rangle_{-n}\cdot\frac{2^{4n}}{2^{4n}} = \frac{mA^2}{4}\frac{2^{2n}\omega_0^2}{(\omega_0^2 2^{2n} - \omega_0^2)^2 + 4\,2^{2n}\omega^2\beta^2} = \langle T\rangle_n$$

þannig að $\boxed{\langle T\rangle_{-n} = \langle T\rangle_n}$

Dæmi 1 Ögn í mætti $U(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}$

Heildarorkan er

$$E(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$

orkan er á bilinu

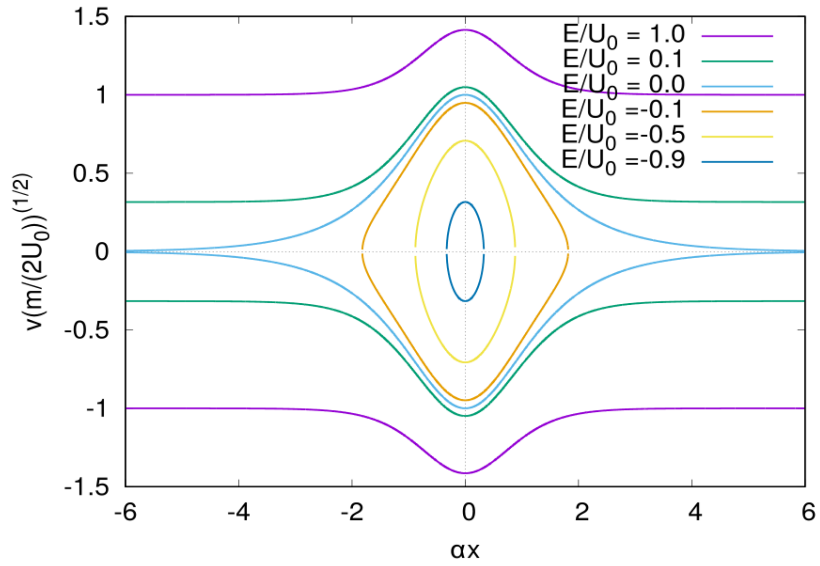
$$E \in [-U_0, \infty) \longrightarrow E \geqslant -U_0$$

Umskrifum sem

$$\frac{\dot{x}^2 m}{2} = E + \frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$

$$\longrightarrow \sqrt{\frac{m}{2U_0}}\,\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{E}{U_0} + \frac{1}{\cosh^2(\alpha x)}}$$

þetta eru eðlilegar víddarlausar breytur á graf



Athyglisvert er að eind með orku $E=0$ er á sveifluhreyfingu sem tognar út yfir allan x-ásinn

Dæmi 2 Skoðum fasaferla fyrir hreyfijöfnuna

$$\ddot{x} + \beta\dot{x}^2 + \omega^2 x = 0$$

Jafnan er ekki víddarlaus, umritum hana sem hneppi fyrsta stigs jafna

$$y = \frac{\dot{x}}{\omega}$$
$$\dot{y}\omega + \beta\omega^2 y^2 + \omega^2 x = 0$$

Skiptum um hnitakerfi

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

Núna mögulegt vegna þess að x og y hafa sömu vídd

$$r^2 = x^2 + y^2 \longrightarrow \boxed{r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}}$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\boxed{r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}}$$

Því fæst

$$r^2\dot{\theta} = -\beta\omega x y^2 - \omega x^2 - \omega y^2$$
$$= -\beta\omega r^3\cos\theta\sin^2\theta - \omega r^2\cos^2\theta - \omega r^2\sin^2\theta$$

$$\longrightarrow \boxed{\dot{\theta} = -\beta\omega r\cos\theta\sin^2\theta - \omega}$$

$$r\dot{r} = \omega x y - \beta\omega y^3 - \omega y x = -\beta\omega y^3$$

$$\longrightarrow \boxed{\dot{r} = -\beta\omega r^2\sin^3\theta}$$

Eins og búast mátti við, sést hér þegar β stefnir á 0, að r breytist ekki, og hringsnúningurinn verður með hornhraða -ω, ódeyfður línulegur sveifill

Við sjáum líka að með endanlegri deyfingu, β, minnkar geisli hreyfingarinnar r þegar $0<\theta<\pi$, en vex annars. Vöxturinn og deyfingin minnka þegar nær kemur $r=0$.

5

Skoðum hreyfijöfnuna

$$\ddot{x} = -\beta\dot{x}^2 - \omega^2 x$$

~ kraftur til vinstri í hlutfalli við hraða í öðru veldi

~ kraftur að 0, í hlutfalli við færslu

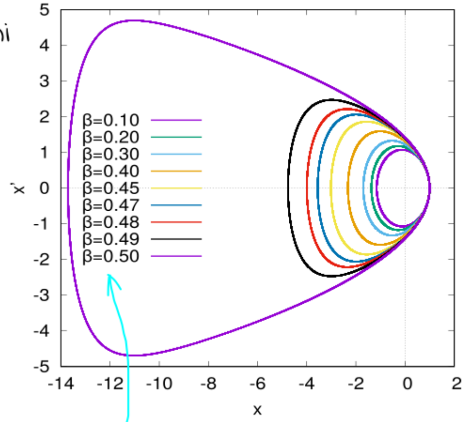
Skala jöfnu, $s = \omega t$ víddarlaus tími

$$\rightarrow \quad x'' + \frac{\beta}{\omega}(x')^2 + x = 0$$

Ætli til sé kerfi sem lýst er með þessari jöfnu?

$x(0) = 1{,}0$

$\dot{x}(0) = 0{,}0$



β/ω

6

Dæmi 3

Hreyfing agnar í mættinu

$$U = \alpha x^2 + \beta x^4$$

Heildarorkan

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \alpha x^2 + \beta x^4$$

$$\rightarrow \quad \dot{x}^2 = \frac{2E}{m} - \frac{2}{m}\left\{\alpha x^2 + \beta x^4\right\}$$

$$= \frac{2E}{m} - \frac{2\alpha}{m}\left\{x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x^4\right\}$$

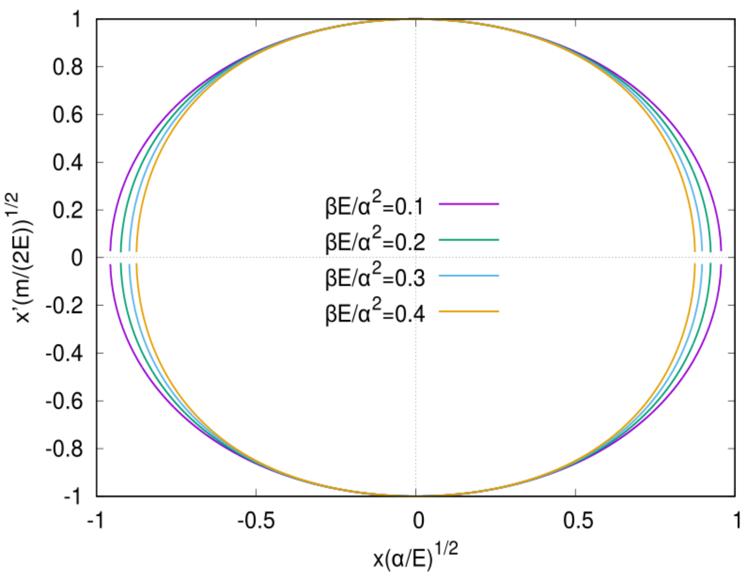
$$= \frac{2E}{m}\left[1 - \frac{\alpha}{E}\left[x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x^4\right]\right]$$

$$\rightarrow \quad \frac{m\dot{x}^2}{2E} = \left[1 - \frac{\alpha x^2}{E} - \frac{\beta E}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha x^2}{E}\right)^2\right]$$

Getum fest E og α

og leikið okkur með β í $\frac{\beta E}{\alpha^2}$

7



Ekki kemur á óvart að sveiflan þrengist með vaxandi β og fastri orku

8

Dæmi 4 Hreyfijafna

$$\ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

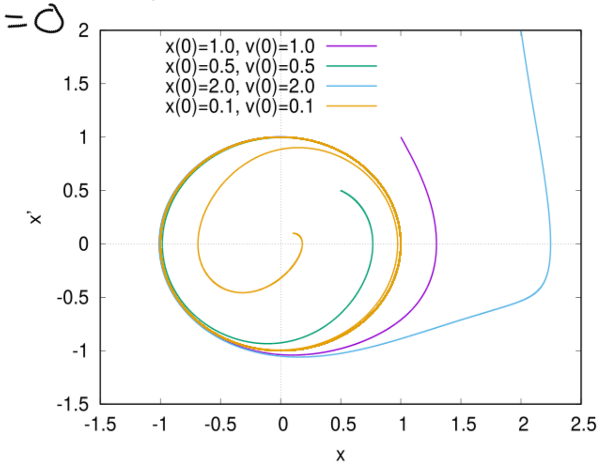
Umskrifum sem fyrsta stigs afleiðuhneppi

$$y = \dot{x}$$

$$\dot{y} + (x^2 + y^2 - 1)y + x = 0$$

Markferill með geisla 1

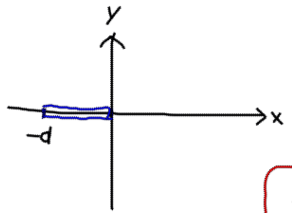
300000 punktar á feril



(1)

Dæmi 1

(1) þyngdarmættið $\Phi(\bar r) = -G\int d^3r' \frac{\rho(\bar r')}{|\bar r - \bar r'|}$, $\rho = \frac{M}{d}$



viljum reikna það á öllum y-ásnum
(einfalt væri að reikna það í allri sléttunni)

$\bar r = (0,y)$, $\bar r' = (x',0)$

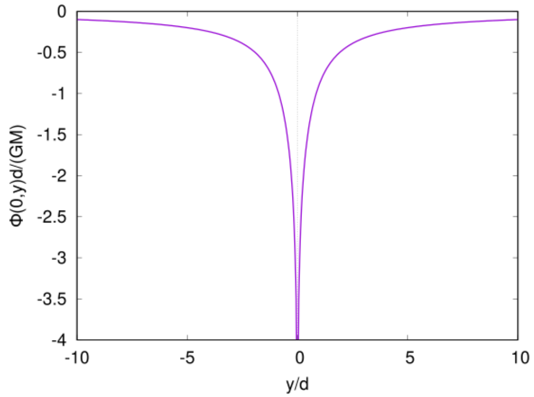
$$\rightarrow \quad \Phi(y) = -\frac{GM}{d}\int_{-d}^{0} \frac{dx'}{\sqrt{(0-x')^2+(y-0)^2}}$$

$$= -\frac{GM}{d}\int_{-d}^{0} \frac{ds}{\sqrt{s^2+y^2}} = \boxed{-\frac{GM}{d}\,\mathrm{ArSinh}\left(\frac{d}{|y|}\right)}$$

(2)

Ágætt er að muna að $-\mathrm{ArSinh}\left(\frac{d}{|y|}\right) = -\ln\left[\frac{d}{|y|} + \sqrt{\left(\frac{d}{y}\right)^2+1}\right]$

Mættið á y-ásnum er ágætt að skoða á grafi



þyngdarmættið stendur alltaf fyrir aðdráttarkraft

(2) þyngdarsviðið með beinni heildun (venjulega forðumst við þá leið)

$$\bar g(\bar r) = -G\int_{-d}^{0} \frac{\rho(\bar r')\,d^3r'}{|\bar r - \bar r'|^2}\,\frac{(\bar r - \bar r')}{|\bar r - \bar r'|},$$

Notum síðan $\bar r - \bar r' = (-x', y)$

(3)

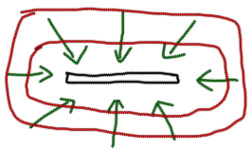
Því fæst $\bar g(0,y) = -G\frac{M}{d}\int_{-d}^{0} ds\,\frac{1}{s^2+y^2}\,\frac{(-s, +y)}{\sqrt{s^2+y^2}}$

Greinum vigurþættina í sundur

$$g_x = -G\frac{M}{d}\int_{-d}^{0}\frac{-s\,ds}{(s^2+y^2)^{3/2}} = +\frac{GM}{d}\left\{\frac{1}{\sqrt{y^2+d^2}} - \frac{1}{|y|}\right\}$$

$$g_y = -\frac{GMy}{d}\int_{-d}^{0}\frac{ds}{(s^2+y^2)^{3/2}} = -G\frac{M}{d}\,y\left\{\frac{d\sqrt{y^2+d^2}}{y^4+(dy)^2}\right\}$$

(3)

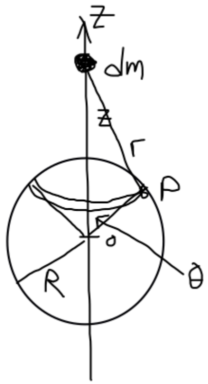


(4) Ekki er til nein einföld samhverfa til að finna jafnþyngdarferla

(4)

Dæmi 2

Í P er mættið vegna dm



$$d\Phi = -G\frac{dm}{r} = -G\frac{dm}{\sqrt{z^2+R^2-2Rz\cos\theta}}$$

Finnum meðaltalið yfir allt kúluyfirborðið

$$\langle d\Phi\rangle = \frac{1}{4\pi R^2}\left\{-G\,dm\int\frac{d\Omega}{\sqrt{z^2+R^2-2Rz\cos\theta}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2}\left\{-G\,dm\,2\pi\int_0^{\pi} d\theta\,\frac{R^2\sin\theta}{\sqrt{z^2+R^2-2Rz\cos\theta}}\right\}$$

Breytuskipti $x=\cos\theta$

$$\langle d\Phi\rangle = -G\frac{dm}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{z^2+R^2-2Rzx}} = -G\frac{dm}{z}$$

Meðaltalið yfir yfirborðið er því mættið í miðju kúluyfirborðinu

5

Dæmi 3

Finna útgildi $\boxed{J(x) = \int_1^2 dt \, \frac{\dot{x}^2}{t^2}, \text{ með } \begin{array}{l} x(1) = 1 \\ x(2) = 7 \end{array}}$

Fellið J(x) er skilgreint sem heildi yfir

$$f(x,\dot{x},t) = \left(\frac{\dot{x}}{t}\right)^2$$

Erum að leita að falli x(t) sem gefur útgildi á J[x], notum enga stika eða fallagrunn

Útgildið finnst með afleiðujöfnu Euler og Lagrange

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{t^2}\dot{x}\right) = 0 \rightarrow -2\frac{2}{t^3}\dot{x} + \frac{2}{t^2}\ddot{x} = 0$$

$$\rightarrow -4\frac{\dot{x}}{t} + 2\ddot{x} = 0 \rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{2\dot{x}}{t}}$$

6

Umritum

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{2}{t}\dot{x} \rightarrow \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = \frac{2}{t}dt$$

Heildum óákveðið

$$\ln(\dot{x}) = 2\ln(t) + A' \rightarrow \dot{x} = \exp[2\ln(t) + A'] = At^2$$

því fæst

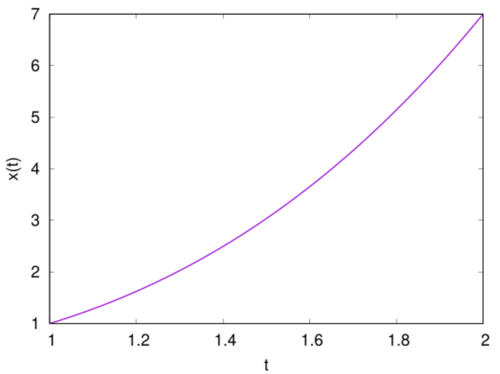
$$\frac{dx}{dt} = At^2 \rightarrow dx = At^2 dt \rightarrow \boxed{x = A\frac{t^3}{3} + B}$$

þar sem A og B eru fastar sem ákveðast af upphafsskilyrðunum

$$\left.\begin{array}{l} x(1) = \frac{A}{3} + B = 1 \\ x(2) = A\frac{8}{3} + B = 7 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} A = \frac{18}{7} \\ B = \frac{1}{7} \end{array}}$$

7

Ég kann betur við táknunina J[x] til að undirstrika að J er felli af ferlinum x(t). J er því ekki fall af x-i í hefðbundnum skilningi



Ferillinn x(t) í (t,x)-sléttunni gefur útgildi fyrir heildið af

$$\left(\frac{\dot{x}}{t}\right)^2$$

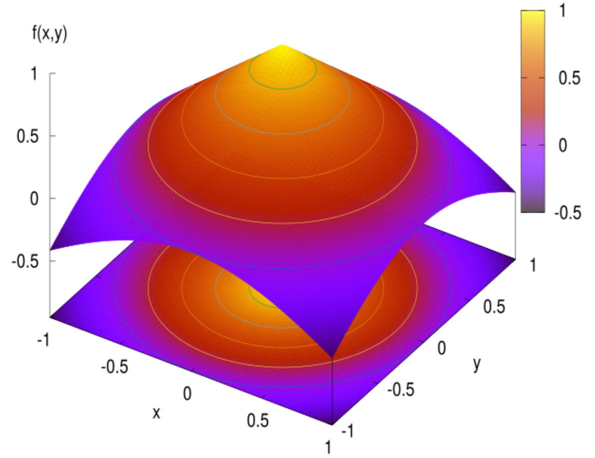
milli markanna t=1 og 2.

Útgildið er einkvæmt ákvarðað fyrir t á bilinu [1,2] því er útgildið víðvært innan þess bils

8

Dæmi 4

Skoðum yfirborðið $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$



Finnum stystu leið frá (0,-1) til (0,1) eftir yfirborðinu

(9)

$$f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2} = 1 - \rho = z$$

Reynum sívalningshnit

$x = \rho\cos\phi \quad \to \quad dx = -\rho\sin\phi \cdot d\phi + d\rho\cos\phi$

$y = \rho\sin\phi \quad \to \quad dy = \rho\cos\phi \cdot d\phi + d\rho\sin\phi$

$$d\bar{s} = d\rho \cdot \hat{\rho} + \rho d\phi \cdot \hat{\phi} + dz \cdot \hat{z}$$

$$ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\phi)^2 + (dz)^2} = \sqrt{2(d\rho)^2 + (\rho d\phi)^2}$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \rho^2}\, d\phi = \sqrt{2 + \left(\rho\frac{d\phi}{d\rho}\right)^2}\, d\rho$$

(10)

veljum fyrst ρ sem óháðu breytuna, og notum Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi'}\right) = 0 \qquad \phi' = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}$$

(Hér er f fallið undir s-heildinu)

$$\to \boxed{\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{\rho^2\phi'}{\sqrt{2+(\rho\phi')^2}}\right\} = 0} \to \frac{\rho^2\phi'}{\sqrt{2+(\rho\phi')^2}} = C$$

sem þýðir að

C: heildunarfasti

$$\phi' = \frac{\partial\phi}{\partial\rho} = \pm\frac{2C}{\rho\sqrt{\rho^2 - C^2}} \quad (*)$$

þetta má heilda sem

vegna eiginleika arcsin(x) er erfitt að ákvarða stuðlana C og B

$$\boxed{\phi = \sqrt{2}\arcsin\left(\frac{C}{\rho}\right) + B}$$

B: heildunarfasti

(11)

Skoðum líka lausn þegar ϕ er óháða breytan. Hún kemur ekki fyrir í heildinu svo við notum heildisham jöfnu Euler-Lagrange

$$\boxed{f - \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial \rho'} = D} \leftarrow$$

heildunarfasti (Hér er f fallið undir s-heildinu)

því fæst

$$\sqrt{2\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \rho^2} - \frac{2\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2}{\sqrt{2\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \rho^2}} = D$$

setjum í annað veldi

$$2(\rho')^2 + \rho^2 - 4(\rho')^2 + \frac{4(\rho')^4}{2(\rho')^2+\rho^2} = D^2$$

einföldum

$$\rho^4 = D^2\left\{2(\rho')^2 + \rho^2\right\} \longrightarrow \boxed{\frac{\rho^4}{D^2} - \rho^2 = 2(\rho')^2}$$

(12)

$\rho' = \frac{d\rho}{d\phi} = 0$ gefur lágmark fyrir ρ, ρ_{min}

$\to \rho_{min} = D$ og vegna (*) fæst $C = \rho_{min}$

Reiknum vegalengdina eftir slóðinni

$$S = \int d\phi\sqrt{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2} = \int d\phi\sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^4}{D^2} - \rho^2}$$

$$= \int d\phi\,\frac{\rho^2}{D} = \int\left|\frac{d\phi}{d\rho}\right| d\rho\,\frac{\rho^2}{D} = \int\left|\frac{d\phi}{d\rho}\right| d\rho\,\frac{\rho^2}{\rho_{min}}$$

$$= \sqrt{2}\int \rho\, d\rho\,\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \rho_{min}^2}} = 2\sqrt{2}\int_{\rho_{min}}^{1}\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2-\rho_{min}^2}}$$

$$\boxed{= 2\sqrt{2}\sqrt{1-\rho_{min}^2}}$$

En við verðum að ákveða ρ_{min} með jaðarskilyrðunum

Lausnin $\phi = \sqrt{2}\,\arcsin\left(\frac{\rho_{min}}{\rho}\right) + B$

þarf að fara í gegnum

$$(1, -\tfrac{\pi}{2}, 0) \quad \text{og} \quad (1, \tfrac{\pi}{2}, 0)$$

Þetta gefur tvær jöfnur

$$-\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\,\arcsin(\rho_{min}) + B \rightarrow -\sin\left\{\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{B}{\sqrt{2}}\right\} = \rho_{min}$$

$$+\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\,\arcsin(\rho_{min}) + B \rightarrow \sin\left\{\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{B}{\sqrt{2}}\right\} = \rho_{min}$$

Eina leiðin til að uppfylla þessar kröfur er að $B = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

því þá verða báðar jöfnurnar

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) = \rho_{min}}$$

Stystu leiðinni yfir keiluna frá gefnu punktunum er því lýst með

$$\boxed{\phi = \sqrt{2}\,\arcsin\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)}{\rho}\right] - \frac{\pi}{\sqrt{2}}}, \quad z = 1 - \rho$$

og lengd hennar er

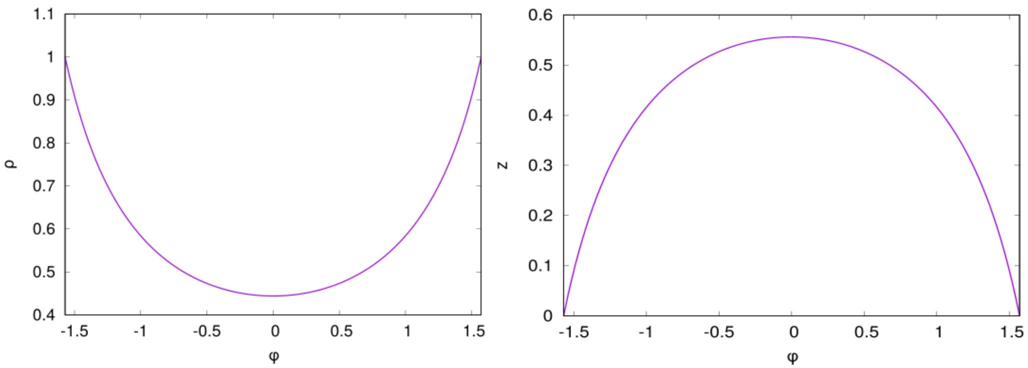
$$\boxed{S = 2\sqrt{2}\,\sin\left[\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right] \approx 2,5343}$$

og

$S > 2$ Beina línan milli punktana

$S < \pi$ lárétti hálfboginn milli punktana

Gröf segja söguna betur



Slóðin liggur hvorki í kringum keiluna eftir láréttum hálfboga, né yfir topppunkt hennar

1

Dæmi 1 Ögn rennur viðnámslaust eftir ferlinum $z = z_0\{\cosh(\alpha x)-1\}$

(1) Skorðunum er lýst með fallinu $g(x,z) = z - z_0\{\cosh(\alpha x)-1\} = 0$, þær eru heilnefndar (holonomic)

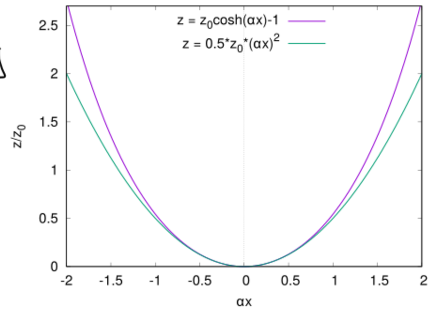
(2) Hreyfijöfnur Lagrange. Byrjum á falli Lagrange, með skorðunum inniföldum, notum Kartísk hnit

$$\bar v = \dot x\hat e_x + \dot z\hat e_z \longrightarrow v^2 = \dot x^2 + \dot z^2 = \dot x^2\{1+(\alpha z_0)^2\sinh^2(\alpha x)\}$$

því $\dot z = \alpha z_0 \dot x \sinh(\alpha x)$

$$U = mgz = mgz_0\{\cosh(\alpha x)-1\}$$

Stöðuorkan U er sýnd hér til hliðar í samanburði við lægstu nálgun fyrir lágt αx, sem við notum síðar



2

Fall Lagrange er þá

$$L = \frac{m}{2}\dot x^2\left[1+(\alpha z_0)^2\sinh^2(\alpha x)\right] - mgz_0\{\cosh(\alpha x)-1\}$$

Hér er aðeins eitt alhnit eftir, x. Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{m}{2}\dot x^2(\alpha z_0)^2\alpha\, 2\sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x) - mg\alpha\sinh(\alpha x)z_0 - \frac{d}{dt}\left\{m\dot x\left(1+(\alpha z_0)^2\sinh^2(\alpha x)\right)\right\} = 0$$

eða $m\dot x^2(\alpha z_0)^2\alpha\sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x) - mg\alpha\sinh(\alpha x)z_0$
$- m\ddot x\left[1+(\alpha z_0)^2\sinh^2(\alpha x)\right] - 2m\dot x^2(\alpha z_0)^2\alpha\sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x) = 0$

3

Tiltekt gefur hreyfijöfnuna

$$\ddot x\left\{1+(\alpha z_0)^2\sinh^2(\alpha x)\right\} + g\alpha z_0\sinh(\alpha x) + \dot x^2\alpha(\alpha z_0)^2\sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x) = 0$$

(2) Notum margfaldara Lagrange við útleiðsluna

$$L = \frac{m}{2}\{\dot x^2 + \dot z^2\} - mgz$$

Við erum því með tvö alhnit, x og z, og jöfnur Lagrange verða

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right) + \lambda\frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

með skorðunum

$g(x,z) = z - z_0\cosh(\alpha x) + z_0 = 0$

4

Hreyfijöfnurnar verða nú

$$-m\ddot x - \alpha z_0\sinh(\alpha x)\lambda = 0 \quad (*)$$
$$-mg - m\ddot z + \lambda = 0$$

Skorðurnar gefa

$$\dot z - \alpha\dot x z_0\sinh(\alpha x) = 0$$
$$\ddot z - \alpha z_0\ddot x\sinh(\alpha x) - (\alpha\dot x)^2 z_0\cosh(\alpha x) = 0$$

$$\lambda = mg + m\alpha z_0\ddot x\sinh(\alpha x) + m(\alpha\dot x)^2 z_0\cosh(\alpha x) \quad (**)$$

$$\ddot x\left[1+(\alpha z_0)^2\sinh^2(\alpha x)\right] + g\alpha z_0\sinh(\alpha x) + \dot x^2(\alpha z_0)^2\alpha\sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x) = 0$$

Sem er sama hreyfijafna og áður

(4) Umskrifum λ sem fall af x og $\dot{x}$, notum (*) --> (**)

$$\lambda = mg - (\alpha z_0)^2 \mathrm{Sinh}^2(\alpha x)\lambda + m\dot{x}^2\alpha^2 z_0 \mathrm{Cosh}(\alpha x)$$

$$\longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{m\left[g + (\dot{x}\alpha)^2 z_0 \mathrm{Cosh}(\alpha x)\right]}{\left\{1 + (\alpha z_0)^2 \mathrm{Sinh}^2(\alpha x)\right\}}}$$

(5) Allkraftarnir eru

$$Q_x = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\alpha z_0 \mathrm{Sinh}(\alpha x)\, m\left[g + (\dot{x}\alpha)^2 z_0 \mathrm{Cosh}(\alpha x)\right]}{\left\{1 + (\alpha z_0)^2 \mathrm{Sinh}^2(\alpha x)\right\}}$$

$$Q_z = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = \lambda$$

Takið eftir að Q_x hverfur þ. $x=0$, og $Q_z = mg + m(\dot{x}\alpha)^2 z_0$ þ. $x=0$. Q_x er oddstætt $x=0$, Q_z er jafnstætt um $x=0$

(6) Smáar sveiflur: $\alpha x \ll 1$

Liðum hreyfijöfnuna

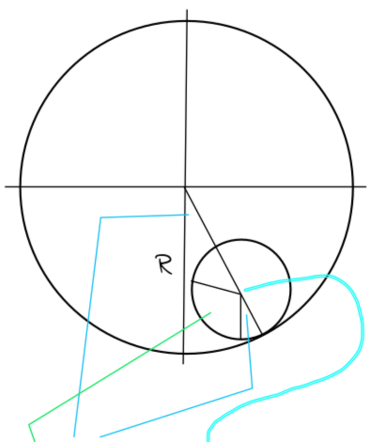
$$\ddot{x}\left\{1 + (\alpha z_0)^2(\alpha x)^2\right\} + g(\alpha z_0)(\alpha x) + \dot{x}^2(\alpha z_0)^2 \alpha x \simeq 0$$

$$\longrightarrow \quad \ddot{x} + g(\alpha z_0)(\alpha x) \simeq 0$$

$$\longrightarrow \quad \omega^2 = (g\alpha z_0 \alpha) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{g\alpha^2 z_0}}$$

og strax sést að víddin fyrir horntíðni sveiflunnar er rétt.

Dæmi 2



(1) $a < R$ svo að sívalningurinn velti

(2) Veltuhornið α þarf alltaf að mæla frá sömu lóðlínu, milli lóðlínunnar og geisla að snertipunkti myndast hornið θ, því fást skorðurnar

$$R\theta = a\theta + a\alpha = a\{\theta + \alpha\}$$

því má skrifa skorðufall sem

$$\boxed{g(\theta,\alpha) = R\theta - a[\theta + \alpha]}$$

θ: Horn CM og snertipunkts frá lóðlínu
α: horn veltu frá lámarki að lóðlínu

(3) Miðað við þessa stikun eru hornin θ og α heppileg alhnit

(4) Finna fall Lagrange $L = T - U$

$$T = T_{cM} + T_{rot} = \frac{M}{2}\left\{(R-a)\dot{\theta}\right\}^2 + \frac{I}{2}\dot{\alpha}^2, \quad I = \frac{M}{2}a^2$$

$$U(\theta) = Mg\left[R - (R-a)\mathrm{Cos}\,\theta\right]$$

þannig að

$$U(0) = Mga$$
$$U\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = MgR$$
$$U(\pi) = Mg(2R-a)$$

stöðuorka CM miðað við að 0-ið sé sett í lægsta punkt rennunnar

Fall Lagrange verður því

$$\boxed{L = \frac{M}{2}\left\{(R-a)\dot{\theta}\right\}^2 + \frac{M}{4}(a\dot{\alpha})^2 - Mg\left[R - (R-a)\mathrm{Cos}\,\theta\right]}$$

9

5 Notum skorðufallið, því eru jöfnur Euler-Lagrange

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) + \lambda \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha}\right) + \lambda \frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0 \end{aligned}}$$

því fást

$$-Mg(R-a)\sin\theta - M(R-a)^2\ddot\theta + \lambda(R-a) = 0$$

$$-\frac{M}{2}a^2\ddot\alpha - \lambda a = 0$$

eða

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot\theta + \frac{g}{R-a}\sin\theta - \frac{\lambda}{M(R-a)} = 0 \\ &\ddot\alpha + \frac{2\lambda}{Ma} = 0 \end{aligned}}$$

10

Seinni hreyfijafnan gefur

$$\ddot\alpha = -\frac{2\lambda}{Ma} \longrightarrow \lambda = -\frac{Ma}{2}\ddot\alpha$$

sem má umskrifa með skorðuskilyrðunum g

$$\lambda = -\frac{Ma}{2}\frac{(R-a)}{a}\ddot\theta$$

sem má nota í fyrri hreyfijöfnunni, sem þá verður

$$\ddot\theta\left[1 + \frac{1}{2}\right] + \frac{g}{(R-a)}\sin\theta = 0$$

eða

$$\ddot\theta + \frac{2g}{3(R-a)}\sin\theta = 0$$

6 því er ljóst að smáar sveiflur munu hafa horntíðnina

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-a)}}$$

R > a, sérstöðupunktur þegar a nálgast R

11

Dæmi 3 Ögn í 2D sléttu í mættinu $U(r) = -k/r^2$

þá er fall Lagrange

$$\boxed{L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + (r\dot\theta)^2\right) + \frac{k}{r^2}}$$

Pólhnit eðlileg, miðlægt mætti

Jöfnur Euler-Lagrange eru

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 0$$

og leiða til hreyfijafna

$$-\frac{2k}{r^3} + mr\dot\theta^2 - \frac{d}{dt}(m\dot r) = 0 \longrightarrow \ddot r - r\dot\theta^2 + \frac{2k}{mr^3} = 0$$

$$-\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot\theta\right) = 0 \longrightarrow mr^2\dot\theta = \text{fasti} \equiv \ell$$

l er hverfiþungi

12

Notum seinni hreyfijöfnuna í þá fyrri

$$\ddot r - \frac{\ell^2}{m^2r^3} + \frac{2k}{mr^3} = 0$$

Margföldum með tímaafleiðunni af rm

$$m\dot r\ddot r - \frac{\dot r\ell^2}{mr^3} + \frac{2k\dot r}{r^3} = 0$$

umritum

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\dot r^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^2}\right] = 0$$

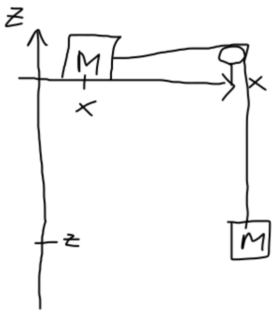
$$\longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left[T + U\right] = 0}$$

Heildarorkan er því varðveitt

Munum að

$$\frac{\ell^2}{2mr^2} = \frac{m^2r^4\dot\theta^2}{2mr^2} = \frac{m}{2}r^2\dot\theta^2 = \frac{m}{2}(r\dot\theta)^2$$

Dæmi 4



því er $x > 0$

$z < 0$

Meira máli skiptir þó að

$$\boxed{\dot{x} = -\dot{z}}$$

Fall Lagrange verður því

$$L = \frac{M}{2}\left\{\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right\} - Mgz = M\dot{z}^2 - Mgz$$

Þyngdarkraftur verkar á M, en verður að hraða 2M

Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = 0 \longrightarrow -Mg - 2M\ddot{z} = 0$$

eða

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{g}{2} = 0} \longrightarrow z(t) = c_1 + c_2 t - \frac{1}{4} g t^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} z(0) &= 0 \\ \dot{z}(0) &= 0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{z = -\frac{1}{4} g t^2}$$

1

Dæmi 1 Ögn með föstum hraða v í láréttu x-y sléttunni eftir teini $y = f(x)$, finna skorðukraftana sem verka á hana

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad U = 0, \quad L = T$$

Skorður $g(x,y) = y - f(x)$ ← heilnefndar, $f(x)$ hefur vídd L

Kröfuna um fastan hraða er ekki hægt að skrifa sem heilnefnda skorðu

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \longrightarrow v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$\longrightarrow 2v\dot{v} = 2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} \longrightarrow \boxed{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0}$$

Hreyfijöfnurna finnast með og alkraftarnir

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \lambda\frac{\partial g}{\partial q} = 0, \qquad Q_q = \lambda\frac{\partial g}{\partial q}$$

$$q = x, y$$

2

Því fæst

$$\left.\begin{aligned} -m\ddot{x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ -m\ddot{y} + \lambda &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\lambda}{m}f'(x) &= 0 \quad (1) \\ \ddot{y} - \frac{\lambda}{m} &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

og

$$Q_x = \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = -\lambda f'(x) = -m\ddot{y}f'(x)$$

$$Q_y = \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = \lambda = m\ddot{y}$$

Síðan má nota hraðaskorðurnar til að sjá að

$$Q_y = -m\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)\ddot{x}$$

$$Q_x = m\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)\ddot{x}f' = m\ddot{x}\left(\frac{\dot{f}}{\dot{y}}\right)$$

Lengra verður ekki haldið án upplýsinga um f, athuga má vel þekkt tilvik

3

Dæmi 2

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2, \quad U = -\frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}, \quad L = T - U$$

Viljum finna hreyfijöfnur Hamiltons. Þurfum H með ummyndun Legrende

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$H = p_x\dot{x} - L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} - \frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)} = H(p_x, x)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$$

$$-\dot{p}_x = \frac{\partial H}{\partial x} = 2U_0\alpha\frac{\tanh(\alpha x)}{\cosh^2(\alpha x)}$$

4

Dæmi 3 Fall Lagrange: $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$

Viljum finna jöfnur sambærilegar Euler-Lagrange fyrir þessa tegund L

Skoðum hnikun virkninnar

$$J = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$$

Hnikum um öll möguleg föll η þannig að

$$q(\alpha, t) = q(0,t) + \alpha\eta(t),$$

$$\dot{q}(\alpha, t) = \dot{q}(0,t) + \alpha\dot{\eta}(t)$$

Fallið sem við leitum að

$$\overbrace{q(t) = q(0,t)}$$

α er þægilegur stiki til að framkvæma hnikunina, en er látinn hverfa að lokum

$$\left.\begin{aligned} \eta(t_1) &= 0 \\ \eta(t_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Skorður notaðar áður}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\eta}(t_1) &= 0 \\ \dot{\eta}(t_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Viðbótar-skorður}$$

5

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\dot q,\ddot q,t)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{\partial \dot q}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \ddot q}\frac{\partial \ddot q}{\partial \alpha}\right]$$

Notum síðan
$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \eta(t), \quad \frac{\partial \dot q}{\partial \alpha} = \dot\eta(t), \quad \frac{\partial \ddot q}{\partial \alpha} = \ddot\eta(t)$$

$$\rightarrow \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \ddot q}\ddot\eta(t)\right]$$

Tvo fyrstu liðina meðhöndlum við á hefðbundinn hátt eins og í bókinni, sjá líka fyrirlestur 08F síður 3-4

6

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\eta(t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \ddot q}\ddot\eta(t)\right]$$

Fyrir síðasta liðinn notum við tvöfalda hlutheildun $\left(\int u\,dv = uv - \int v\,du\right)$

$$\frac{\partial L}{\partial \ddot q}\dot\eta(t)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot q}\right)\dot\eta(t)$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot q}\right)\eta(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot q}\right)\eta(t)$$

$$\rightarrow \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot q}\right)\right]\eta(t) = 0$$

7

Þar sem $\eta(t)$ er almennt fall verður stæðan innan svigans að hverfa

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot q}\right) = 0} \quad (*)$$

og þessi jafna er útvíkkun á jöfnu Euler og Lagrange

b)
$$L = -\frac{m}{2} q\ddot q - \frac{k}{2} q^2$$

Beytum (*)

$$-kq - \frac{m}{2}\ddot q + \frac{d^2}{dt^2}\left(-\frac{m}{2} q\right) = 0$$

$$\rightarrow 2m\ddot q + 2kq = 0 \rightarrow \boxed{\ddot q + \frac{k}{m} q = 0}$$

Hreyfijafna fyrir hreintóna sveifil með $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

8

Dæmi 4

Sveifill með $l = l_0 + a\sin(\omega t)$

$$= l_0\left[1 + \frac{a}{l_0}\sin(\omega t)\right], \quad a < l_0$$

$$T = \frac{m}{2}(\bar v)^2$$

$$\bar v = \dot{\bar r} = \dot l\,\hat e_r + l\dot\theta\,\hat e_\theta, \quad \hat e_r \cdot \hat e_\theta = 0$$

$$U = -mgl\cos\theta, \qquad \dot l = \omega a \cos\theta$$

Býst við einu alhniti, θ, og skorðum sem eru ekki heilskorður

Notum Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 0 \qquad l = l(t)$$

$$\boxed{L = \frac{m}{2}\left\{(l\dot\theta)^2 + \dot l^2\right\} + mgl\cos\theta = L(t)}$$

⑨

því fæst hreyfijafnan

$$-mgl\sin\theta - \frac{d}{dt}\{ml^2\dot\theta\} = 0$$

$$gl\sin\theta + 2l\dot l\dot\theta + l^2\ddot\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot\theta + 2\frac{\dot l}{l}\dot\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

Beitum ummyndun Legendre til að finna H

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = ml^2\dot\theta$$

$$H = p_\theta\dot\theta - L = ml^2\dot\theta^2 - \frac{m}{2}l^2\dot\theta^2 - \frac{m}{2}\dot l^2 - mgl\cos\theta$$

$$\boxed{= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - \frac{m}{2}\dot l^2 - mgl\cos\theta = H(p_\theta, \theta, t)}$$

⑩

þannig að

$$\boxed{H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - \frac{m\dot l^2}{2} - mgl\cos\theta}$$

en heildarorkan er

$$\boxed{E = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{m\dot l^2}{2} - mgl\cos\theta}$$

þessum föllum ber því ekki saman. Fyrir tímaháð kerfi er fall Hamiltons ekki jafnt heildarorkunni

⑪

Hreyfijöfnur Hamiltons

$$\boxed{\begin{aligned}\dot\theta &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}\\ -\dot p_\theta &= \frac{\partial H}{\partial\theta} = mgl\sin\theta\end{aligned}}$$

$$l = l_0\left(1 + \frac{a}{l_0}\sin(\omega t)\right)$$

Athyglisvert er hve einfaldar þessar hreyfijöfnur eru. Í þeim kemur ekki fyrir tímaafleiðan af lengdinni l. Hún kæmi vissulega fyrir ef við setjum þær saman í eina annarsstigs afleiðujöfnu

1

Dæmi 1   Ögn í mættinu $U(r) = -U_0 \exp\{-(\frac{r}{a})^2\}$

Virkamættið er $V(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$, $\ell = \mu r^2 \dot\theta$ fasti

Finnum lágmark í V(r)

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{U_0}{a} 2\frac{r}{a} \exp\{-(\frac{r}{a})^2\} - \frac{\ell^2}{\mu r^3} = 0$$

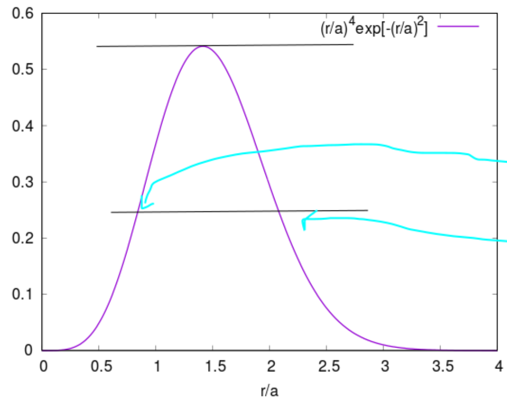
$$\to \boxed{\exp\{-(\frac{r}{a})^2\} = \frac{a^2\ell^2}{2\mu U_0 r^4} = \frac{\ell^2}{2U_0\mu a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4}$$

Óbein jafna fyrir útgildi sem getur verið lágmark eða hámark, umskrifum sem

$$\boxed{\left(\frac{r}{a}\right)^4 \exp\{-(\frac{r}{a})^2\} = \frac{\ell^2}{\underbrace{2U_0\mu a^2}_{\text{fasti}}}}$$

Þessi útsetning nýtist enn betur á grafi, skoðum

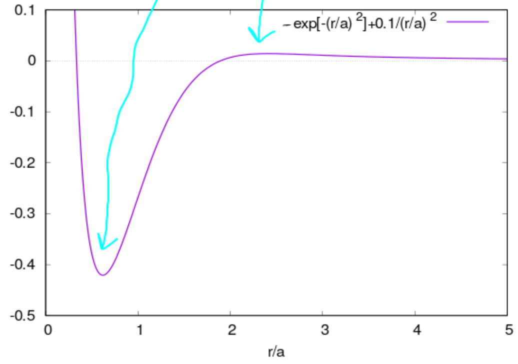
2



Því þarf fastinn að vera nógu lágur til að bjóða upp á lausn á óbeinu jöfnunni. Þegar tvær lausnir eru, er aðeins sú fyrri fyrir lágmark, en sú seinni fyrir staðbundið hámark

Við gætum fundið gildi fyrir r þegar mættið tekur lágmark, við köllum það einfaldlega r_0

Eins getum við fundið efri mörkin fyrir herfiþungann l, en mikilvægast er að sjá að til eru efri mörk á honum fyrir hringbraut



2b

Finnum hvar fallið g(x) tekur hámark

$$g(x) = x^4 e^{-x^2} \to g'(x) = 4e^{-x^2}\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

gefur $x^2 = 2 \to x = \frac{r}{a} = \sqrt{2}$

Í þessum punkti er

$$4e^{-2} = \frac{\ell_{max}^2}{2U_0\mu a^2} \to \boxed{\ell_{max}^2 = 8U_0\mu a^2 e^{-2}}$$

Gildi virka mættisins í þessum punkti

$$V(\sqrt{2}a) = -U_0 e^{-2} + \frac{\ell_{max}^2}{2\mu \sqrt{2}^2 a^2} = -U_0 e^{-2} + \frac{8U_0\mu a^2 e^{-2}}{2\mu 2 a^2}$$

$$= -U_0 e^{-2} + 2e^{-2}U_0 = U_0 e^{-2}$$

3

Skoðum aðeins skilyrðið fyrir hringlaga braut

$$L = \frac{\mu \dot r^2}{2} + \frac{\mu (r\dot\theta)^2}{2} + U_0 \exp\{-(\frac{r}{a})^2\}$$

Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = 0$

$$\to \mu r\dot\theta^2 - \frac{U_0 2}{a}\left(\frac{r}{a}\right)\exp[-(\frac{r}{a})^2] - \mu\ddot r = 0$$

Notum $\ell = \mu r^2\dot\theta$ og umskrifum hreyfijöfnuna

$$\ddot r - \frac{\ell^2}{\mu^2 r^3} + \frac{U_0 2}{\mu a}\left(\frac{r}{a}\right)\exp\{-(\frac{r}{a})^2\} = 0$$

Hringbraut $\dot r, \ddot r = 0$

$$\to \exp\{-(\frac{r}{a})^2\} = \frac{\ell^2}{2U_0\mu a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4$$

sama skilyrði og áður!

Dæmi 2   Lennard-Jones mætti atóma

$$U(r) = E_0\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right\}$$

Miðlægt mætti

$$\rightarrow \quad L = \underbrace{\frac{M}{2}|\dot{\vec{R}}|^2}_{L_{cm}} + \overbrace{\frac{\mu}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 - U(r)}^{L_{rel}}$$

$$L_{rel} = \frac{\mu}{2}\left\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right\} - E_0\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right\}$$

$$\frac{\partial L_{rel}}{\partial \theta} = 0,$$ θ er rásuð breyta (e. cyclic) $\mu r^2\dot{\theta} = \ell$ fasti

Virka mættið

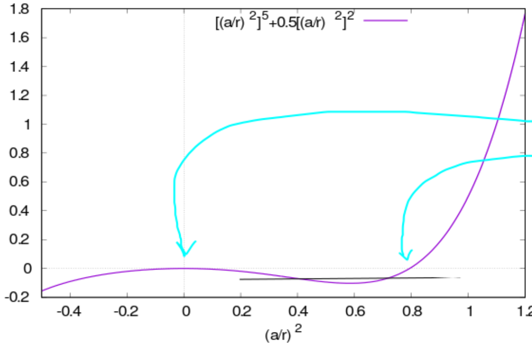
$$\boxed{V(r) = E_0\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right\} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}}$$

Finnum jafnvægisfjarlægð í kerfinu

$$\frac{\partial}{\partial r}V(r) = E_0\left\{-\frac{12}{a}\left(\frac{a}{r}\right)^{13} + \frac{6}{a}\left(\frac{a}{r}\right)^{7}\right\} - \frac{\ell^2}{\mu r^3} = 0$$

Umskrifum sem

$$\boxed{\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]^5 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]^2 + \frac{\ell^2}{12E_0\mu a^2} = 0} \qquad (*)$$



Jafnvægislengdin r_0 er rauntala því er lausn aðeins möguleg á bilinu $0 < (a/r)^2 < 0.8$

Nú gefur rótin til hægri jafnvægisfjarlægðina, en hin staðbundið hámark mættisins

Smáar sveiflur. Leiðum út hreyfijöfnuna með Euler-Lagrange

$$-\mu\ddot{r} + \mu r\dot{\theta}^2 - E_0\left\{-\frac{12}{a}\left(\frac{a}{r}\right)^{13} + \frac{6}{a}\left(\frac{a}{r}\right)^{7}\right\} = 0$$

Notum $\mu r^2\dot{\theta} = \ell$

$$\rightarrow \quad \boxed{\ddot{r} - \frac{\ell^2}{\mu^2 r^3} - \frac{E_0}{\mu}\left\{-\frac{12}{a}\left(\frac{a}{r}\right)^{13} + \frac{6}{a}\left(\frac{a}{r}\right)^{7}\right\} = 0}$$

Athugun á stöðugri hringbraut gefur sama skilyrði og hér á undan, en smáar sveiflur, jafnvægislausn r_0 Smátt frávik δ

$$r = r_0 + \delta, \quad \dot{r} = \dot{r}_0 + \dot{\delta} = \dot{\delta}, \quad \ddot{r} = \ddot{\delta}$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(r_0+\delta)^3} \simeq \frac{1}{r_0^3} - \frac{3\delta}{r_0^4} + \cdots = \frac{1}{r_0^3}\left\{1 - 3\frac{\delta}{r_0}\cdots\right.$$

$$\frac{1}{(r_0+\delta)^n} \simeq \frac{1}{r_0^n}\left\{1 - n\frac{\delta}{r_0}\cdots\right.$$

Setjum inn í hreyfijöfnuna og höldum öllum fyrstastigs liðum

$$\ddot{\delta} - \frac{\ell^2}{\mu^2 r_0^3}\left[1 - 3\frac{\delta}{r_0}\right] + \frac{12E_0a^{12}}{\mu r_0^{13}}\left[1 - 13\frac{\delta}{r_0}\right] - \frac{6E_0a^6}{\mu r_0^7}\left[1 - 7\frac{\delta}{r_0}\right] = 0$$

Þessir þrír liðir eru jafnvægisskilyrðið og falla því út

Eftir stendur

$$\boxed{\ddot{\delta} + \underbrace{\left\{\frac{3\ell^2}{\mu^2 r_0^4} - \frac{156E_0a^{12}}{\mu r_0^{14}} + \frac{42E_0a^6}{\mu r_0^8}\right\}}\delta \simeq 0}$$

Hér er ω^2, grunntíðni smáu sveiflunnar. Þessa grunntíðni má einfalda með jafnvægisskilyrðinu og þannig losna við ℓ^2

7b

$$\omega^2 = \frac{3}{r_0^4}\left[\frac{\ell^2}{\mu^2} - \frac{52E_0a^2}{\mu}\left(\frac{a}{r_0}\right)^{10} + \frac{14E_0a^2}{\mu}\left(\frac{a}{r_0}\right)^4\right]$$

Munum að lágmarksskilyrðin gáfu

$$\frac{\ell^2}{\mu^2} = -\frac{12E_0a^2}{\mu}\left(\frac{a}{r_0}\right)^{10} + \frac{6E_0a^2}{\mu}\left(\frac{a}{r_0}\right)^4$$

því fæst

$$\boxed{\omega^2 = \frac{3}{r_0^4}\left[-\frac{64E_0a^2}{\mu}\left(\frac{a}{r_0}\right)^{12} + \frac{20E_0a^2}{\mu}\left(\frac{a}{r_0}\right)^4\right]}$$

8

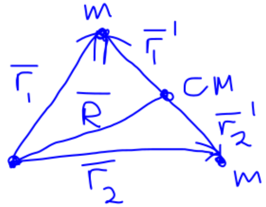
Dæmi 3 Tveir massar m á láréttu hálu borði víxlverkast með F=-kr

$$\boxed{L = \frac{M}{2}|\dot{\bar R}|^2 + \frac{\mu}{2}|\dot{\bar r}|^2 - U(r)}, \quad U(r) = \frac{k}{2}r^2$$

$$M = 2m, \quad \mu = \frac{m}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar R} = 0 \to \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar R}}\right) = \frac{d\bar P_{CM}}{dt} = 0 \to \bar P_{CM} = M\dot{\bar R} \text{ fasti}$$

$$\boxed{L_{rel} = \frac{\mu}{2}\left\{\dot r^2 + (r\dot\theta)^2\right\} - \frac{k}{2}r}, \quad \bar r = \bar r_1' - \bar r_2'$$



$$\frac{\partial L_{rel}}{\partial \theta} = 0, \quad \theta \text{ er rásuð breyta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot\theta}\right) = 0 \to \mu r^2\dot\theta = \ell \text{ fasti}$$

9

Hreyfijöfnur

$$\frac{\partial L_{rel}}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot r}\right) = 0, \quad \mu r^2\dot\theta = \ell$$

$$\mu r\dot\theta^2 - kr - \mu\ddot r = 0 \to \boxed{\begin{aligned} &\ddot r - \frac{\ell^2}{\mu^2 r^3} + \frac{k}{\mu}r = 0 \\ &\ell = \mu r^2\dot\theta \text{ fasti} \\ &\bar P_{CM} = M\dot{\bar R} \text{ fasti}\end{aligned}}$$

Fall Hamiltons

$$L = \frac{M}{2}|\dot{\bar R}|^2 + \frac{\mu}{2}\left\{\dot r^2 + (r\dot\theta)^2\right\} - \frac{k}{2}r^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar P_{CM} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar R}} = M\dot{\bar R}, \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = \mu\dot r \\ &p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \mu r^2\dot\theta \quad \text{alskriðþungar}\end{aligned}}$$

10

$$H = \bar P_{CM}\cdot\dot{\bar R} + p_\theta\dot\theta + p_r\dot r - L$$

$$= M|\dot{\bar R}|^2 + \ell\dot\theta + \mu\dot r^2 - \frac{M}{2}|\dot{\bar R}|^2 - \frac{\mu\dot r^2}{2} - \frac{\mu(r\dot\theta)^2}{2} + \frac{k}{2}r^2$$

$$\boxed{= \frac{|\bar P_{CM}|^2}{2M} + \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{2}r^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &p_\theta = \ell \text{ fasti} \\ &\bar P_{CM} = m\dot{\bar R} \text{ fasti} \\ &\dot r = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{\mu} \\ &-\dot p_r = \frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\ell^2}{\mu r^3} + kr\end{aligned}}$$

Hreyfijöfnur Hamiltons

(11)

Dæmi 4   Ögninni er lýst með

$$L = \frac{m}{2}\left\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2\right\} - mgz$$

og skorðunum $r^2 = 4az \rightarrow 2r\dot{r} = 4a\dot{z} \rightarrow \dot{z} = \frac{r\dot{r}}{2a}$

Notum beint í L til að fækka alhnitum

$$\rightarrow L = \frac{m}{2}\left\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \left(\frac{r\dot{r}}{2a}\right)^2\right\} - mg\frac{r^2}{4a}$$

$$= \frac{m}{2}\left\{\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right\} - mg\frac{r^2}{4a}$$

Miðlægt mætti, óháð θ, sem er þá rásuð breyta

$$\rightarrow mr^2\dot{\theta} = \ell \quad \text{fasti}$$

því er aðeins eftir eitt alhnit r

(12)

Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial L} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{m}{4a^2}r\dot{r}^2 + mr\dot{\theta}^2 - \frac{mg}{2a}r - \frac{d}{dt}\left\{m\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\dot{r}\right\} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{m\left\{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\ddot{r} + \frac{mr\dot{r}^2}{4a^2} + \frac{mg}{2a}r - \frac{\ell^2}{mr^3} = 0}$$

sem er hreyfijafna agnarinnar. Finnum hringlaga braut $\rightarrow \ddot{r} = 0, \dot{r} = 0, r = r_0$

$$\rightarrow \frac{mg}{2a}r_0 - \frac{\ell^2}{mr_0^3} = 0 \rightarrow \ell^2 = \frac{m^2 g}{2a}r_0^4$$

$$\text{en} \quad \ell^2 = m^2 r_0^4 \dot{\theta}^2 \rightarrow \boxed{m^2 r_0^4 \dot{\theta}^2 = \frac{m^2 g}{2a} r_0^4}$$

(13)

Smáar sveiflur, truflun um hringbraut

$$r = r_0 + \delta, \quad \dot{r} = \dot{\delta}, \quad \ddot{r} = \ddot{\delta}$$

$$(r_0 + \delta)^2 \simeq r_0^2 + 2r_0\delta + \dots$$

$$\frac{1}{(r_0+\delta)^3} \simeq \frac{1}{r_0^3}\left\{1 - 3\frac{\delta}{r_0} + \dots\right.$$

$$r\dot{r}^2 = (r_0 + \delta)\dot{\delta}^2 \rightarrow 0$$

$$r^2\ddot{r} \simeq (r_0+\delta)^2\ddot{\delta} = (r_0^2 + 2r_0\delta + \dots)\ddot{\delta} \simeq r_0^2\ddot{\delta}$$

því verður hreyfijafnan

$$m\left\{1 + \frac{r_0^2}{4a^2}\right\}\ddot{\delta} + \frac{mg}{2a}(r_0 + \delta) - \frac{\ell^2}{mr_0^3}\left\{1 - 3\frac{\delta}{r_0}\right\} = 0$$

Notum jafnvægisskilyrðið

$$\frac{mg}{2a}r_0 - \frac{\ell^2}{mr_0^3} = 0$$

(14)

til að umskrifa hreyfijöfnuna sem

$$m\left\{1 + \frac{r_0^2}{4a^2}\right\}\ddot{\delta} + \left\{\frac{mg}{2a} + \frac{3\ell^2}{mr_0^4}\right\}\delta = 0$$

Jafnvægisskilyrðið gefur líka, og skilgreinum

$$\ell^2 = \frac{m^2 g}{2a} r_0^4 \qquad z_0 \equiv \frac{r_0^2}{4a^2}$$

þá fæst hreyfijafnan

$$\boxed{\ddot{\delta} + \left[\frac{2g}{a + z_0}\right]\delta = 0}$$

þessi línulega nálgun hreyfijöfnunnar gefur grunntíðnina fyrir smáar sveiflur

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2g}{a + z_0}}}$$

1

Dæmi 1

Massamiðja hálfkúluhvels með innri og ytri geisla a og b, og fastan þéttleika ρ á rúmmál

Setjum botnflöt hvelsins í x-y-sléttu. Samhverfa gefur $x_{cm}=0$ og $y_{cm}=0$

$$V=\underbrace{\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta}_{=1} \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b r^2\, dr$$

Kúluhnit falla best að verkefninu

$$= 2\pi \int_a^b r^2\, dr = 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\Big|_a^b\right]$$

$Z_{cm} \neq 0$

$$= \frac{2\pi}{3}\left\{b^3-a^3\right\}$$

Rúmmál hálfkúluhvelsins

2

$$\boxed{Z_{CM}} = \frac{1}{V}\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b r^2\, dr\, \underbrace{z}_{r\cos\theta = z}$$

$$= \frac{1}{V}\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b r^3\, dr$$

$$= \frac{2\pi}{V}\underbrace{\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta\cos\theta}_{1/2}\left[\frac{r^4}{4}\Big|_a^b\right]$$

$$V=\frac{2\pi}{3}\left[b^3-a^3\right]$$

$$= \frac{2\pi}{4V}\left\{b^4-a^4\right\}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4V}\left\{b^4-a^4\right\} = \boxed{\frac{3}{8}\left[\frac{b^4-a^4}{b^3-a^3}\right]}$$

3

Dæmi 2

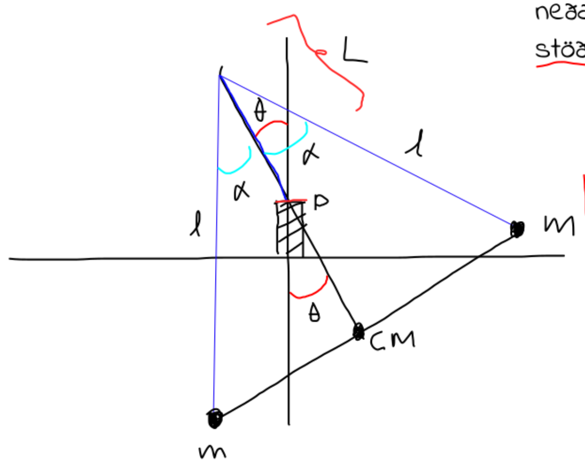
Skoðum aðeins sveiflur í sléttu blaðsins, hinar eru eins

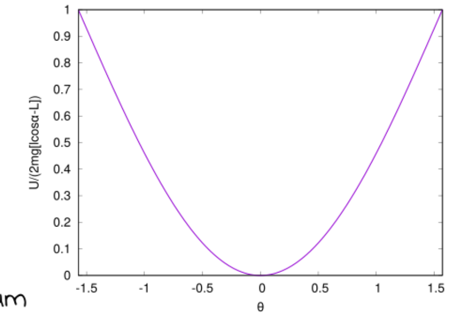
Ég vel $\boxed{l\cos\alpha > L}$

því þá lendir massamiðjan fyrir neðan P og kerfið getur verið í stöðugu jafnvægi

Stöðuorkan er þá

$$\boxed{U=g2m(l\cos\alpha - L)(1-\cos\theta)}$$





Um hornið gildir $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

Fyrir stærra horn dettur stubburinn af stallinum

4

$$T = 2\frac{m}{2}\left[(l\cos\alpha - L)\dot\theta\right]^2, \quad U=g2m(l\cos\alpha - L)(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 0 \longrightarrow -2m(l\cos\alpha - L)g\sin\theta - (l\cos\alpha - L)^2 2m\ddot\theta = 0$$

eða

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{g}{(l\cos\alpha - L)}\theta \simeq 0}$$

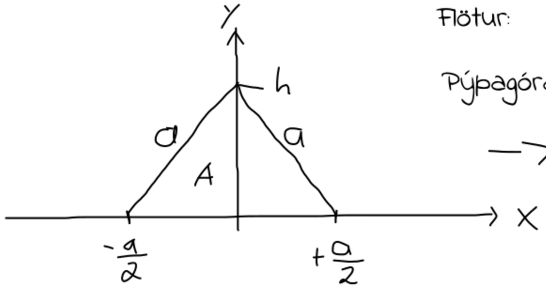
í línulegri nálgun

Kerfið hagar sér eins og pendúll, og fyrir smáar sveiflur fæst

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{(l\cos\alpha - L)}}}$$

5

Dæmi 3 Finna massamiðju jafnhliða þríhyrnings



Flötur: $A = \left(\frac{a}{2} h\right)$

Pýþagóras: $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$

$$\longrightarrow \quad h = \frac{\sqrt{3}\,a}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4}$$

Lína í gegnum (a/2,0) og $\left(0, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ $\qquad x_{cm} = 0$

$$y = -\sqrt{3}\,x + \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{y_{cm} = \frac{2\sigma \int_0^{a/2} dx \int_0^{-\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}a}{2}} dy\, y}{\frac{\sqrt{3}a^2}{4}} = \frac{4}{\sqrt{3}a^2}\int_0^{a/2} dx \, \frac{\left(-\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}{2}}$$

6

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{2}{a^2}\int_0^{a/2} dx \left\{3x^2 - 3xa + \frac{3}{4}a^2\right\}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}\,a^2}\left[\left(x^3 - \frac{3a}{2}x^2 + \frac{3a^2}{4}x\right)\Big|_0^{a/2}\right]$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}\,a^2}\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \frac{3a}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}\left(\frac{a}{2}\right)\right\}$$

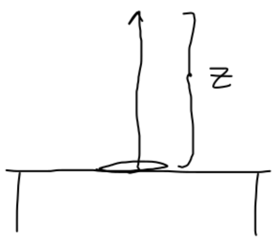
$$= \frac{4a^3}{\sqrt{3}\,a^2}\left[\frac{1}{8} - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right] = \frac{4a^3}{\sqrt{3}\,a^2 8} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\boxed{= \frac{\sqrt{3}\,a}{6} = y_{cm}}$$

7

Dæmi 4 Þjált reipi togað upp af borði með fastri hröðun a, finna kraftinn á höndina

Massi á lengd: λ, lengd reipis L



Þyngd reipis á lofti: $\lambda z g$

Atlag á hönd: $F_{imp} = \frac{d}{dt}\left[(\lambda z) v\right]$

$$v = at, \quad v(0) = 0$$

$$\ddot{z} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dz}v = a$$

$$\longrightarrow \quad v^2 = 2az \quad \text{ef} \quad v(0) = 0$$

$$F_{imp} = \frac{d}{dt}\left\{(\lambda z) v\right\} = \left(\lambda \frac{dz}{dt}\right) v + \lambda z \frac{dv}{dt}$$

8

$$= \lambda v^2 + \lambda z a = \lambda 2az + \lambda z a$$

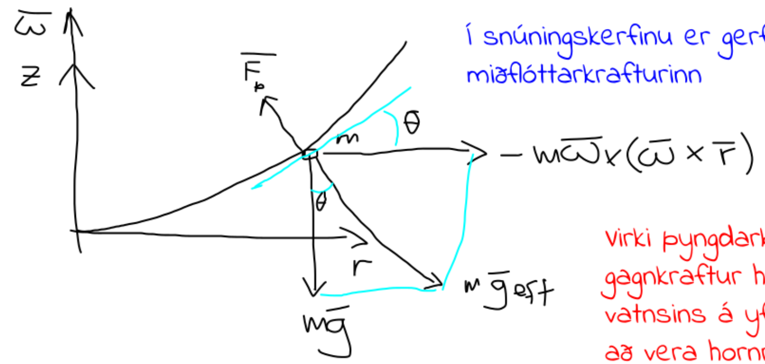
$$= 3\lambda a z$$

Því fæst fyrir heildarkraftinn

$$\boxed{F(z) = \lambda z g + 3\lambda a z = \lambda z\left[g + \underbrace{3a}_{\text{atlag}}\right]}$$

Þar sem við höfum ekki tiltekið stefnu kraftsins

Dæmi 1 Vatnið og yfirborð þess eru kyrr í viðmiðunarkerfi fötunnar, sem snýst með föstum hraða m.v. tregðukerfi



í snúningskerfinu er gerfikraftur miðflóttarkrafturinn

Virki þyngdarkrafturinn g_{eff} og gagnkraftur hans, þrýstingur vatnsins á yfirborðið F_p verða að vera hornrétt á yfirborðið

Þar sem vatnið er kyrrt í snúningskerfinu hverfur kraftur Coriolis

$$m\bar a_{rel} = 0 = \bar F_p \underbrace{- m\bar\omega\times(\bar\omega\times\bar r) + m\bar g}_{m\bar g_{eff}}$$

$$\to \quad \bar g_{eff} = -g\hat z + r\omega^2\hat r$$

Hallatalan í hverjum punkti yfirborðsins í fjarlægð r frá miðju er því

$$\frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}$$

sem má heilda til að finna hæð yfirborðsins í hverjum r-punkti

$$\boxed{z = \int dr\, \frac{r\omega^2}{g} = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + C}$$

fasti

þannig að yfirborðið er fleygbogalagað, og með nógu hröðum snúningi má bera botn fötunnar út frá miðju hennar

Dæmi 2 Skoðum eiginleika $L = e^{\gamma t}\left\{\frac{m}{2}\dot q^2 - \frac{k}{2}q^2\right\}$

① $$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) = 0$$

$$\to \quad -kqe^{\gamma t} - \frac{d}{dt}\left\{e^{\gamma t} m\dot q\right\} = 0$$

$$-kqe^{\gamma t} - \gamma m\dot q e^{\gamma t} - e^{\gamma t} m\ddot q = 0$$

$$\to \quad \boxed{\ddot q + \gamma\dot q + \frac{k}{m}q = 0}$$

sem er hreyfijafnan fyrir deyfðan hreintóna sveifil ef $\gamma > 0$. Athyglisvert er líka að L verður venjulega fall Lagrange fyrir kerfið ef γ hverfur

② Athugum hvað gerist við breytuskiptin $q \to e^{-\gamma t/2}x$

Hvernig lítur hreyfilýsingin út fyrir breytuna x?

$$\dot q = -\frac{\gamma}{2}e^{-\gamma t/2}x + e^{-\gamma t/2}\dot x = e^{-\gamma t/2}\left\{\dot x - \frac{\gamma x}{2}\right\}$$

$$\to \quad L = \frac{m}{2}\left\{\dot x - \frac{\gamma x}{2}\right\}^2 - \frac{k}{2}x^2$$

$$= \frac{m}{2}\left\{\dot x^2 - \gamma\dot x x + \frac{\gamma^2x^2}{4}\right\} - \frac{k}{2}x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) = 0$$

$$\to \quad -kx - \frac{m}{2}\gamma\dot x + \frac{m}{2}\frac{\gamma^2}{2}x - \frac{d}{dt}\left\{m\dot x - \gamma x\frac{m}{2}\right\} = 0$$

ekki mjög kunnulegt enn, en höldum áfram

$$\rightarrow -\frac{k}{m}x - \cancel{\frac{1}{2}\gamma\dot{x}} + \frac{\gamma^2}{4}x - \ddot{x} + \cancel{\frac{\gamma}{2}\dot{x}} = 0$$

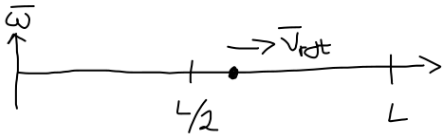
$$\rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x - \frac{\gamma^2}{4}x = 0$$

eða

$$\boxed{\ddot{x} + \left\{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^4}{4}\right\}x = 0}$$

sem er nákvæmlega hreyfijafna vandeyfðs hreintóna sveifils með hliðraða horntíðni vegna deyfingarinnar. Sýnt hefur verið að þetta fall Lagrange er ekki einhlítt og til eru önnur L sem hafa ekki rétt markgildi þegar deyfingin hverfur. L er háð tíma og því eru veruleg vandkvæði á að útbúa fall Hamiltons H, með heppilega eiginleika. Sömu vandræði eru innan skammtafræði. Opin kerfi eru allt í kringum okkur, en þeim þarf að lýsa á annan hátt.

Dæmi 3



$\bar{\omega}\times\bar{r}$: ⊗

$-\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$: →

Í snúningskerfinu

$$\boxed{m\bar{a}_{rot} = -m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) - 2m\bar{\omega}\times\bar{v}_{rot}}$$

sleppum þyngdar hröðun g

miðflóttakraftur

kraftur Coriolis

$-\bar{\omega}\times\bar{v}_{rot}$: ⊙

Enginn viðnámskraftur

$$m\ddot{r} = m\omega^2 r$$ fyrir perluna á stönginni

$$\rightarrow \boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = 0}$$ hreyfijafna perlunnar á stönginni

Hreyfijafnan hefur almennu lausnina

Hér sést ástæða vinsælda slöngvivopna í fornöld

$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

$$r(0) = \frac{L}{2} \;\longrightarrow\; A + B = \frac{L}{2}$$

$$\dot{r}(0) = 0 \;\longrightarrow\; \omega(A-B) = 0 \;\rightarrow\; A = B$$

og lausnina má skrifa sem

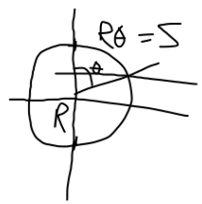
$$\boxed{r(t) = \frac{L}{2}\mathrm{Cosh}(\omega t)} \qquad \boxed{v(t) = \omega\frac{L}{2}\mathrm{Sinh}(\omega t)}$$

Perlan fer af stönginni þegar $t = t_f$

$$r(t_f) = \frac{L}{2}\mathrm{Cosh}(\omega t_f) = L \;\rightarrow\; \boxed{t_f = \frac{1}{\omega}\mathrm{ArCosh}(2)}$$

Dæmi 4

Engin loftmótstaða, eldflaug frá N-skauti beint suður í lítilli hæð miðað við R



$$v = 6{,}5 \text{ km/s}$$

$$\omega_J = 7{,}27\times10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$R = 6370 \text{ km}$$

Notum fast hnitakerfi sem jörðin snýst í. Þá er geigun

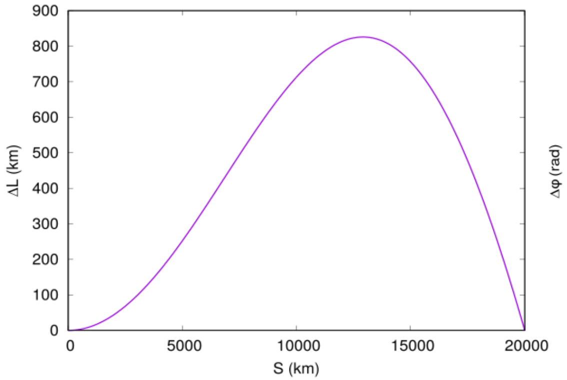
$$\Delta L = \omega_J R \,\mathrm{Sin}\theta \cdot T \,,$$ T er flugtími

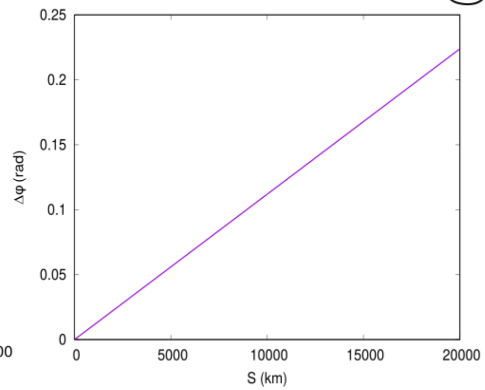
$$= \omega_J R \,\mathrm{Sin}\left(\frac{S}{R}\right)\frac{S}{v}$$

Horngeigun

$$\Delta\phi = \left\{\frac{\Delta L}{2\pi R\,\mathrm{Sin}\theta}\right\}2\pi = \omega_J T = \omega_J\frac{S}{v}$$

9





vegna kúlulögunar jarðar vex lengdargeigunin fyrst og minnkar svo, takið eftir hvar hámarkið er. Eðlilega sést þessu hegðun ekki í horngeigunni vegna eiginleika kúluhnitakerfisins

①

Dæmi 1 Hverfiþungaþinur hlutar er

a)

þar sem I_0 hefur víddina ML^2

wxMaxima gefur mér eigingildin

$$0, \quad I_0, \quad I_0$$

$$\mathbb{I} = I_0 \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

með eiginvigrana

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

því get ég búið til fylkið R=U úr eiginvigrunum þ. a.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

þannig að

$$U^{+}\mathbb{I}\,U = I_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eiginvigrar samhverfs raungilds fylkis skilgreina hornrétta ummyndun, (eða snúning)

þyrill - (rotor)

②

c) $$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}(\hat{x}+\hat{z}) = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \bar{L} = \mathbb{I}\cdot\bar{\omega} = \frac{\omega I_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$$

$\bar{L}$ og $\bar{\omega}$ eru ekki samsíða þar sem $\bar{\omega}$ er ekki samsíða höfuðás kerfisins

d) En þegar $$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}(\hat{x}-\hat{y}) = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\bar{L} = \mathbb{I}\cdot\bar{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} I_0 \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Nú eru $\bar{L}$ og $\bar{\omega}$ samsíða því $\bar{\omega}$ er samsíða höfuðás, ($\bar{\omega}$ er samsíða eiginvigri $\mathbb{I}$)

e) Ekkert ytra vægi --> $|\bar{L}|$ og $\bar{L}$ eru varðveitt. Þetta á við d)-lið, en ekki við c)-lið

f) $$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}(\hat{x}-\hat{y}), \quad T = \frac{1}{2}\,\bar{\omega}\cdot\mathbb{I}\cdot\bar{\omega} = \frac{I_0}{2}\frac{\omega}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\frac{\omega}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\omega^2}{4} I_0$$

③

Dæmi 2 Stjarfhlutur settur saman úr mössum m staðsettum í

$$\left(0,0,\frac{L}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\left(0,\frac{L}{2},-\frac{L}{2\sqrt{3}}\right)$$
$$\left(0,-\frac{L}{2},-\frac{L}{2\sqrt{3}}\right)$$

Massamiðja í $(0,0,0)$

a) Finnum höfuðása kerfisins og hverfitregður þess um þá. Kerfið er jafnhliða þríhyrningur í y-z-sléttu

$$I_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} m\left[\delta_{ij}\left(\sum_{k=x}^{z} x_{\alpha k}^2\right) - x_{\alpha i}x_{\alpha j}\right]$$

$$I_{xx} = \sum_{\alpha}^{3} m\left[y_\alpha^2 + z_\alpha^2\right] = m\left[2\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{L^2}{3}\right]$$

og á sams konar hátt

$$= m\left[\frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{6} + \frac{L^2}{3}\right] = mL^2$$

$$I_{yy} = \frac{mL^2}{2}, \quad I_{zz} = \frac{mL^2}{2}$$

④

Eins fæst $$I_{yz} = 0, \quad I_{zy} = 0$$

$$I_{zx} = 0, \quad I_{xz} = 0$$

$$I_{zy} = -\sum_{\alpha} m\left\{-\frac{L^2}{4\sqrt{3}} + \frac{L^2}{4\sqrt{3}}\right\} = 0, \quad I_{yz} = 0$$

og

$$\mathbb{I} = mL^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Hornalínuform --> augljósir eiginvigrar

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Köllum þá v_x, v_y, v_z

b) Kerfinu er nú snúið um 45° um z-ás, þannig að hnit massanna verða

$$\left(0,0,\frac{L}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(-\frac{L}{2\sqrt{2}}, \frac{L}{2\sqrt{2}}, -\frac{L}{2\sqrt{3}}\right), \quad \left(\frac{L}{2\sqrt{2}}, -\frac{L}{2\sqrt{2}}, -\frac{L}{2\sqrt{3}}\right)$$

því fást nú

$$I_{xx} = mL^2\left[2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{3}\right] = \frac{3}{4}mL^2$$

$$I_{yy} = mL^2\left\{2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{3}\right\} = \frac{3}{4}mL^2$$

$$I_{zz} = mL^2\left\{2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right\} = \frac{1}{2}mL^2$$

$$I_{yx} = -\sum_\alpha m[x_\alpha y_\alpha] = -mL^2\left\{-\frac{2}{4\cdot 2}\right\} = \frac{mL^2}{4}$$

$$I_{zx} = -\sum_\alpha m[x_\alpha z_\alpha] = -mL^2\left\{\frac{1}{4\sqrt{6}} - \frac{1}{4\sqrt{6}}\right\} = 0$$

$$I_{zy} = -\sum_\alpha m[y_\alpha z_\alpha] = -mL^2\left\{\frac{1}{4\sqrt{6}} - \frac{1}{4\sqrt{6}}\right\} = 0$$

því fæst

$$\mathbb{I}' = mL^2\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

með eigingildi og vigra $\lambda_1 = mL^2$, $\lambda_2 = \frac{mL^2}{2}$, $\lambda_3 = \frac{mL^2}{2}$

$$v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad v_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_3' = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Eigingildin eru þau sömu og áður fyrir $\mathbb{I}$, eiginvigrarnir eða höfuðásarnir eru breyttir.

c) Hefðum við geta séð þessar niðurstöður fyrir, án reikninga?

Söfnum saman staðreyndum, setjum saman snúningsfylkið um z-ásinn um 45°

$$R(\pi/4) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R$$

þá fæst $\boxed{R\mathbb{I}'R^T = \mathbb{I} = \mathbb{I}_d}$

og áður

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{U^T\mathbb{I}'U = \mathbb{I} = \mathbb{I}_d}$$

og $\boxed{U = R^T}$, $\boxed{Rv_1' = v_1,\ Rv_2' = v_2,\ Rv_3' = v_3}$

Hvernig túlkum við þessar niðurstöður?

Kerfinu var snúið um 45°

$$Uv_1 = v_1', \quad Uv_2 = v_2', \quad Uv_3 = v_3'$$

$$\mathbb{I}'v' = \lambda v'$$

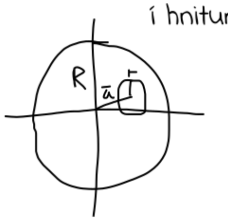
$$\lambda v = \lambda U^T v' = U^T\mathbb{I}'v' = U^T\mathbb{I}'U(U^Tv') = \mathbb{I}v$$

og sams konar fyrir R. Fyrir U er venjan að segja að ef hnitakerfi er snúið um visst horn þá fáist upprunalegu eiginvigrarnir með því að snúa þeim nýju til baka um sama horn. Sams konar skýring er fyrir R.
Nýju eiginvigrarnir, skilgreina nýtt hnitakerfi, höfuðásana, sem við fáum táknaða við gamla hnitakerfið.
Í skammtafræði er venjan að tala um snúning hnitakerfisins til að finna útsetningu virkja Hamiltons í hnitakerfi sem gefur hornalínuform hans.
Rúmið getur verið óendanlega vítt. Tölulegar aðferðir eru þá í afstífðu rúmi.

9

Dæmi 3

Kúla með geisla R, hol með geisla r og miðju í (a_1,a_2,a_3) í hnitum kúlunnar



$$I_{ij} = \int_V dv\,\rho(\vec{x})\left[\delta_{ij}\sum_k x_k^2 - x_i x_j\right]$$

Skoðum lausn á dæmi 1 í 10. skammti á vefnum fyrir 2015. Um hvaða ás sem er um miðju kúlunnar fæst

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

því fáum við fyrir einsleita heila kúlu

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

10

Notum setningu Jacob Steiner um samsíða ása

$$\mathbb{J}_{ij} = \mathbb{I}_{ij}{}^{-\frac{2}{5}mr^2} - m\left[a^2\delta_{ij} - a_i a_j\right]$$

$$X_i = x_i + a_i \qquad a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$I_{ij} = \delta_{ij}\frac{2}{5}MR^2$$

$$J_{ij} = \delta_{ij}\left(\frac{2MR^2}{5} - \frac{2}{5}mr^2\right) - M\frac{r^3}{R^3}\left[a^2\delta_{ij} - a_i a_j\right]$$

$$= \delta_{ij}\left\{\frac{2M}{5}\left(R^2 - \frac{r^5}{R^3}\right) - M\frac{r^3a^2}{R^3}\right\} + M\frac{r^3}{R^3}a_i a_j$$

$$M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$$

$$m = \frac{4\pi}{3}r^3\rho$$

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

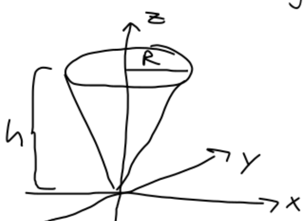
$$m = \frac{4\pi}{3}r^3\frac{3M}{4\pi R^3} = M\frac{r^3}{R^3}$$

Drögum holið frá

11

Dæmi 4

Keila snýst um topppunkt



Notum sívalningshnit, flötur: $r = \frac{z}{h}R$

$$I_{ij} = \rho\int_0^h dz\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\frac{z}{h}R} r\,dr\,\underbrace{\left[\delta_{ij}\sum_k x_k^2 - x_i x_j\right]}_{\Theta_{ij}}$$

$x_3 = z$

$x_2 = r\sin\phi$

$x_3 = r\cos\phi$

12

$$\Theta_{11} = \left[y^2 + z^2\right] = r^2\sin^2\phi + z^2$$

$$\Theta_{22} = \left[x^2 + z^2\right] = r^2\cos^2\phi + z^2$$

$$\Theta_{33} = \left[x^2 + y^2\right] = r^2$$

$$V = 2\pi\int_0^h dz\int_0^{\frac{z}{h}R} dr\,r = \frac{2\pi}{2}\int_0^h dz\left(\frac{zR}{h}\right)^2 = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$I_{ij} = 0$ ef $i \neq j$

vegna samhverfu, heildið um 2π yfir hornaföllin hverfur

$$I_{33} = 2\pi\rho\int_0^h dz\int_0^{\frac{z}{h}R} dr\,r^3 = 2\pi\rho\int_0^h dz\left(\frac{zR}{h}\right)^4\frac{1}{4}$$

$$= \rho\frac{\pi R^3}{10}Rh$$

(13)

$$M = V\rho = \frac{\pi R^2 h}{3}\rho \rightarrow \rho = \frac{3M}{\pi R^2 h}$$

$$\rightarrow I_{33} = \frac{3M}{\pi R^2 h}\frac{\pi R^3}{10} R h = \frac{3M}{10} R^2$$

$$I_{11} = \rho\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{z}{h}R} r\,dr\left[r^2 \sin^2\phi + z^2\right]$$

$$= \rho\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \left\{\frac{\left(\frac{zR}{h}\right)^4}{4}\sin^2\phi + z^2\frac{\left(\frac{zR}{h}\right)^2}{2}\right\}$$

$$= \rho\int_0^h dz\left\{\frac{R^4 z^4 \pi}{4h^4} + \frac{z^4 R^2 2\pi}{2h^2}\right\} = \rho\left\{R^4 h\frac{\pi}{20} + \frac{R^2 h^3 2\pi}{10}\right\}$$

(14)

$$I_{11} = \frac{3M}{\pi R^2 h}\left\{\frac{R^4 h \pi}{20} + \frac{R^2 h^3 2\pi}{10}\right\} = \frac{3MR^2}{20} + \frac{3Mh^2}{5}$$

og sama niðurstaða fyrir I_{22}

Um massamiðju

$$Z_{CM} = \frac{\rho}{M}\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{zR}{h}} r\,dr\, z = \frac{3}{4}h$$

því breytast I_{11} og I_{22}

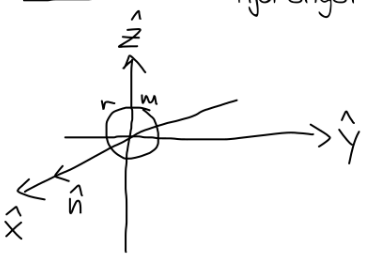
$$J_{11} = I_{11} - M\left\{\frac{3}{4}h\right\}^2 = I_{11} - \frac{9}{16}Mh^2$$

$$= \frac{3MR^2}{20} + \frac{3Mh^2}{5} - \frac{9}{16}Mh^2 = \frac{3MR^2}{20} + \frac{3}{80}Mh^2$$

og sama fyrir J_{22}

1

Dæmi 1



Hjól snýst um massamiðju með $\bar\omega_A = \omega_A \hat n$

$\bar\omega_B = \omega_B \hat z$

a)

því er í kerfi hjólsins

$$\bar\omega = \begin{pmatrix}\omega_A\\0\\\omega_B\end{pmatrix}$$

b) Höfuðásar (í kerfi hjólsins) eru

$\hat e_1$ með $I_1 = \frac{mr^2}{2}$

$\hat e_2$ og $\hat e_3$ með

$I_2 = I_3 = \frac{mr^2}{4}$

$$\rightarrow \mathbb{I} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/2\end{pmatrix}\frac{mr^2}{2}$$

2

$$\bar L = \mathbb{I}\cdot\bar\omega = \frac{mr^2}{2}\begin{pmatrix}\omega_A\\0\\\frac{\omega_B}{2}\end{pmatrix} \rightarrow \bar L \nparallel \bar\omega$$

því $\bar\omega$ er ekki samsíða höfuðás

c) Hvaða vægi þarf til að viðhalda þessum snúningi?

$\frac{d\bar L}{dt} = \tau$, en við þurfum $\boxed{\left(\frac{d\bar L}{dt}\right)_{space} = \left(\frac{d\bar L}{dt}\right)_{body} + \bar\omega\times\bar L}$

$$\rightarrow \left(\frac{d\bar L}{dt}\right)_{space} = 0 + \bar\omega\times\bar L = \frac{mr^2}{2}\begin{vmatrix}\hat e_1 & \hat e_2 & \hat e_3\\ \omega_A & 0 & \omega_B\\ \omega_A & 0 & \frac{\omega_B}{2}\end{vmatrix} \leftarrow !$$

$$= -\hat e_2\frac{mr^2}{2}\left[\frac{\omega_A\omega_B}{2} - \omega_A\omega_B\right] = +\hat e_2\frac{mr^2}{4}\omega_A\omega_B$$

3

Því er ytravægið sem viðheldur snúningnum gefið í hnitakerfi hjóls!

d) Finnið snúningsfylkið sem snýr fasta kerfinu í kerfi hjólsins.
Hér gæti manni fyrst dottið í hug að reyna að tákna snúningana tvo við horn Eulers og nota

$$\lambda_\phi = \begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \lambda_\theta = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

með $\phi = \omega_B t$ og $\theta = \omega_A t$

og setja saman $\lambda = \lambda_\theta\lambda_\phi$

en fylkin víxlast ekki $\boxed{[\lambda_\theta, \lambda_\phi] = \lambda_\theta\lambda_\phi - \lambda_\phi\lambda_\theta \neq 0}$

og hjólið snýst "samtímis" um þessi tvö horn

4

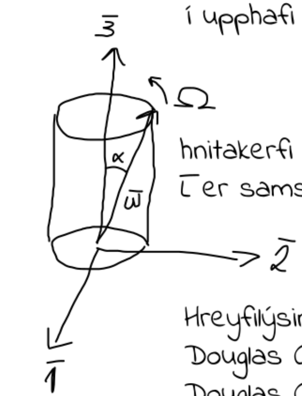
Snúningurinn er um ás $\hat m = \begin{pmatrix}\omega_A\\0\\\omega_B\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\omega_A^2+\omega_B^2}} = \begin{pmatrix}m_1\\0\\m_3\end{pmatrix}$

Spurningin er ekki í lagi því upplýsingar um upphafsgildi vantar, en ef við leyfum okkur að setja snúningshornið sem ωt, $\omega = \sqrt{\omega_A^2+\omega_B^2}$
þá gefur wikipedia:

$$R = \begin{pmatrix}\cos(\omega t) + m_1^2(1-\cos(\omega t)), & -m_3\sin(\omega t), & m_1m_3(1-\cos(\omega t))\\ m_3\sin(\omega t), & \cos(\omega t), & -m_1\sin(\omega t)\\ m_1m_3(1-\cos(\omega t)), & m_1\sin(\omega t), & \cos(\omega t)+m_3^2(1-\cos(\omega t))\end{pmatrix}$$

Dæmi 2

Samhverfur hlutur snýst án ytri krafts eða vægis, í upphafi er L í $\bar{2}$-$\bar{3}$ sléttu ($\bar{x}_2$-$\bar{x}_3$ í hnitakerfi hlutar)



hnitakerfi hlutar 1,2,3. 3 er samhverfuás hlutar,
$\bar{L}$ er samsíða $\bar{x}'_3$ (í tregðukerfi rúmsins í kring)

Hreyfilýsing kerfisins er nokkuð flókin og er í kafla 13.20.1 hjá Douglas Cline, tæpt er á henni í fyrirlestri 20 bls. 1-5. Douglas Cline leiðir út hreyfijöfnuna

$$\boxed{\left(\frac{d\hat{e}_3}{dt}\right)_{space} = \frac{\bar{L}}{I_1} \times \hat{e}_3}$$

því er hornhraði samhverfuássins um $\bar{L}$

$$\Omega_3 = \frac{L}{I_1}$$

en, samkvæmt útleiðslu Douglas Cline gildir líka

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= 0 \\ L_2 &= I_1 \omega \sin\alpha \\ L_3 &= I_3 \omega \cos\alpha \end{aligned}\right\} \longrightarrow L = \omega \sqrt{(I_1 \sin\alpha)^2 + (I_3 \cos\alpha)^2}$$

og því fæst

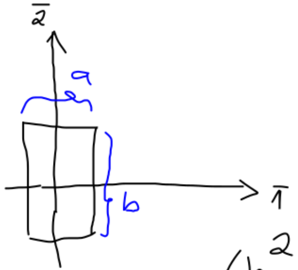
$$\boxed{\Omega_3 = \frac{\omega}{I_1}\sqrt{(I_1 \sin\alpha)^2 + (I_3 \cos\alpha)^2}}$$

.. en, skoðið endilega útleiðslu Douglas Cline

Dæmi 3

Þunn rétthyrnd plata með lengdir a og b.
Finnum vægið sem er nauðsynlegt til að hún snúist um hornalínuna með hornhraða ω

Sýnidæmi 13.4 í bók Douglas Cline gefur



$$I_{33} = \frac{M}{12}(a^2+b^2)$$

$$I_{11} = \frac{M}{12} b^2, \quad I_{22} = \frac{M}{12} a^2$$

$$\mathbb{I} = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\omega} = (a,b,0)\frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\bar{L} = \mathbb{I}\cdot\bar{\omega} = \frac{M\omega}{12\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} ab^2 \\ ba^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ef $a \neq b$ þá er $\bar{\omega}$ ekki samsíða höfuðás, og því eru $\bar{L}$ og $\bar{\omega}$ ekki samsíða
--> þurfum ytra vægi til að viðhalda snúningnum, þ.e. stefnu hans.
Þurfum að nota

$$\boxed{\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{space} = \left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{body} + \bar{\omega} \times \bar{L}}$$

$$\longrightarrow \left\{\begin{aligned} N_1 &= I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ N_2 &= I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ N_3 &= I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{aligned}\right.$$

$\omega_3 = 0$

ω_1, ω_2 fastar

$$N_1 = 0 \qquad N_3 = -(I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

$$N_2 = 0$$

9

því fæst

$$\boxed{N_3 = -\frac{M}{12}\left(b^2-a^2\right)\frac{\omega^2}{a^2+b^2}ab}$$

Takið sérstaklega eftir að þetta ytra vægi er samhliða 3-ás plötunnar, en ekki í tregðukerfinu. Allir reikningar einfaldast þegar notað er hnitakerfi snúningshlutarins sjálfs, en ekki tregðukerfið. Ef við þurfum upplýsingarnar í tregðukerfinu verðum við að nota snúningsummyndun til þess.

Ef a=b þarf ekkert vægi til að viðhalda snúningsásnum, því þá er hann höfuðás, sem kerfið getur snúist frjálst um. Berið saman við hverfitregðu teningsins sem reiknuð er í bókinni

10

Dæmi 4

Samhverfur hlutur snýst "frjálst" um samhverfuás sinn og massamiðju. Snúningur um höfuðás

$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1-I_2)\omega_1\omega_2 = N_3$$

og $N_3 = -b\omega_3$ <-- Samhverfur hlutur --> $I_1 = I_2$

Hreyfijafnan verður því

$$I_3\dot{\omega}_3 + b\omega_3 = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{\omega}_3 + \frac{b}{I_3}\omega_3 = 0}$$

með lausn

$$\boxed{\omega_3 = \omega_0 \exp\left[-\frac{b}{I_3}t\right]} \quad \text{ef} \quad \omega_3(0) = \omega_0$$

11

Fyrir snúðinn er þetta verulega flóknara mál þar sem

$$\dot{\omega}_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

og því vaknar spurningin hvernig væri eðlilegast og raunsannast að gera líkan af núningi fyrir þessar breytur $\dot{\phi}$ og $\dot{\psi}$, eða þarf líka $\dot{\theta}$?

Einfalt er að finna verkfræðitexta um þetta á vefnum.

1

Dæmi 1 Tvær eindir með massa m víxlverkast þ.a. stöðuorku þeirra er lýst með

$$U(x_1,x_2) = \frac{k}{2}\left[7x_1^2 + 4x_2^2 + \underbrace{4x_1x_2}_{=2x_1x_2+2x_2x_1}\right]$$

Almennt gildir að

$$U = \frac{1}{2}\sum_{jk} A_{jk}\, q_j q_k$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{jk} m_{jk}\, \dot q_j \dot q_k$$

því fást

$$\mathbb{A} = k\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M} = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2

og eigingildisverkefnið verður

$$\mathbb{A}\bar{a} = \omega^2 \mathbb{M}\bar{a} \quad \rightarrow \quad k\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\bar{a} = \omega^2 m \bar{a}$$

sem er hefðbundið eigingildisverkefni fyrir samhverft fylki þar sem fylkið $\mathbb{M}$ er á hornalínuham og $\bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Eigingildin eru

$$\frac{\omega^2 m}{k} = \begin{cases} 3 \\ 8 \end{cases}$$

með óstöðluðum eiginvigrum $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, og $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

3

Eigingildin er best að skrifa sem

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{8k}{m}}}$$

Tölulega staðlaðir eiginvigrar eru þá

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Vigrarnir eru hornréttir og skilgreina hornrétta ummyndun

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

þannig að ef $\bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ þá fæst

$$U^T \mathbb{A} U (U^T \bar{a}) = \omega^2 m (U^T \bar{a})$$

$$U^T \bar{a}_1 = \bar{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Þetta eru eiginvigrarnir í grunni normalháttanna

$$U^T \bar{a}_2 = \bar{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4

því er sagt að normalhættirnir séu $U^T \bar{a} = \bar{\eta}$, eða

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}x_2 \\ \eta_2 &= \frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}x_2 \end{aligned}}$$

Tímaháð höfum við

$$\eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}, \quad \omega_r = \begin{cases} \omega_1 & : r=1 \\ \omega_2 & : r=2 \end{cases}$$

$$\bar{a} = U\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{Re}\left\{\beta_1 \frac{1}{\sqrt{5}} e^{i\omega_1 t} + \beta_2 \frac{2}{\sqrt{5}} e^{i\omega_2 t}\right\} \\ x_2(t) &= \mathrm{Re}\left\{-\beta_1 \frac{2}{\sqrt{5}} e^{i\omega_1 t} + \beta_2 \frac{1}{\sqrt{5}} e^{i\omega_2 t}\right\} \end{aligned}}$$

Hér þarf að muna eins og við notum síðar að β_i eru tvinntölur og við höfum því 4 óþekkta fasta sem ákvarðast af upphafsgildum $x_1(0)$, $\dot x_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot x_2(0)$

(5)

Dæmi 2   þrír sveiflar víxlverkast

$$L = \sum_{n=1}^{3}\left\{\frac{m}{2}\dot{x}_n^2 - \frac{k x_n^2}{2}\right\} + k'(x_1x_2 + x_2x_3)$$

$$\to M = \mathbb{I}m, \quad A_y = \begin{pmatrix} k & -k' & 0 \\ -k' & k & -k' \\ 0 & -k' & k \end{pmatrix}$$

$A\bar{a} = \omega^2 M\bar{a}$ með eigingildi

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2 m &= k - \alpha k' \\ \omega_2^2 m &= k + \alpha k' \\ \omega_3^2 m &= k \\ \alpha &= \sqrt{2} \end{aligned}\right\} \to \boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k - \alpha k'}{m}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k + \alpha k'}{m}} \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}}$$

(6)

óstaðlaðir eiginvigrarnir eru

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Stöðlum og myndum hornrétta ummyndunarfylkið

$$U = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Tímaháðu normalhættirnir eru

$$\eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}, \quad \beta_r \in \mathbb{C}, \quad \bar{\eta} = U^T \bar{a}$$

(7)

$$\bar{a} = U\bar{\eta}, \quad \bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\beta_1 e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2}\beta_2 e^{i\omega_2 t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_3 e^{i\omega_3 t}\right]$$

$$x_2(t) = \mathrm{Re}\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\beta_1 e^{i\omega_1 t} + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta_2 e^{i\omega_2 t}\right]$$

$$x_3(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{\beta_1}{2} e^{i\omega_1 t} + \frac{\beta_2}{2} e^{i\omega_2 t} - \frac{\beta_3}{\sqrt{2}} e^{i\omega_3 t}\right]$$

Síðan koma líka 3 hraðaskilyrði, en munum að 6 jöfnur þarf til að ákvarða $\beta_i \in \mathbb{C}$ fyrst koma þessi hér á undan

$$2x_0 = \mathrm{Re}\left\{\beta_1 + \beta_2 + \sqrt{2}\beta_3\right] \qquad x_1(0) = x_0$$

$$0 = \mathrm{Re}\left\{-\beta_1 + \beta_2\right\} \qquad x_2(0) = 0$$

$$0 = \mathrm{Re}\left\{\beta_1 + \beta_2 - \sqrt{2}\beta_3\right] \qquad x_3(0) = 0$$

(8)

$$0 = \mathrm{Im}\left[\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3\sqrt{2}\right\} \qquad \dot{x}_1(0) = 0$$

$$0 = \mathrm{Im}\left\{-\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2\right] \qquad \dot{x}_2(0) = 0$$

$$2v_0 = \mathrm{Im}\left\{\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 - \beta_3\omega_3\sqrt{2}\right] \qquad \dot{x}_3(0) = v_0$$

2 x (3 x 3) jöfnuhneppi, munum $\boxed{\beta_i = \beta_i' + i\beta_i''}$

<u>Raunhluti:</u>

lausn

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \\ \beta_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \boxed{\begin{aligned} \beta_1' &= \frac{x_0}{2} \\ \beta_2' &= \frac{x_0}{2} \\ \beta_3' &= \frac{x_0}{\sqrt{2}} \end{aligned}}$$

⑨

þverhluti:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\sqrt{2} \\ -\omega_1 & \omega_2 & 0 \\ \omega_1 & \omega_2 & -\omega_3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1'' \\ \beta_2'' \\ \beta_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2v_0 \end{pmatrix}$$

lausn

$$\boxed{\beta_1'' = \frac{v_0}{2\omega_1}, \quad \beta_2'' = \frac{v_0}{2\omega_2}, \quad \beta_3'' = -\frac{v_0}{\sqrt{2}\omega_3}}$$

$$\to \; x_2(t) = \mathrm{Re}\left\{\left(-\frac{x_0}{2} - \frac{i v_0}{2\omega_1}\right)e^{i\omega_1 t} + \left(\frac{x_0}{2} + \frac{i v_0}{2\omega_2}\right)e^{i\omega_2 t}\right\}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \left\{-\frac{x_0}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{v_0}{2\omega_1}\sin(\omega_1 t) + \frac{x_0}{2}\cos(\omega_2 t) - \frac{v_0}{2\omega_2}\sin(\omega_2 t)\right\}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

⑩

$$\boxed{x_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{x_0\left[-\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right] + v_0\left[\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} - \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2}\right]\right\}}$$

$(x_2(0) = 0)$

með

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k - \alpha k'}{m}} \qquad \alpha = \sqrt{2}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + \alpha k'}{m}}$$

⑪

Dæmi 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad A\bar{a} = \omega^2 \bar{a}$$

a) Eigingildin samkvæmt wxmaxima

$$\boxed{\omega_1^2 = 3, \quad \omega_2^2 = 8}$$

með stöðluðum eiginvigrum

$$\boxed{\bar{a}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

því er ummyndunarfylkið

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Normalhættirnir eru

$$\boxed{\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}}$$

því

$$\bar{\eta} = U^T \bar{a}$$

⑫

Úr normalháttunum $\bar{\eta}$ lesum við:

η_1 er frekar samhverfur CM sveifluháttur með $\omega_1 = \sqrt{3}$

η_2 er frekar andsamhverfur sveifluháttur með $\omega_2 = \sqrt{8}$

b) Örvum bara η_2

þá þarf að velja $\eta_1(0) = 0$, ég bæti við $\dot{\eta}_1(0) = 0$

$$\to \begin{cases} x_1(0) = -x_2(0)/2 \\ \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)/2 \end{cases}$$

c) Lausnir, $x_1(t)$ og $x_2(t)$ $\qquad \bar{a} = U\bar{\eta}$

$$x_1(t) = \frac{\mathrm{Re}}{\sqrt{5}}\left\{2\beta_1 e^{i\omega_1 t} + \beta_2 e^{i\omega_2 t}\right\}$$

$$x_2(t) = \frac{\mathrm{Re}}{\sqrt{5}}\left\{\beta_1 e^{i\omega_1 t} - 2\beta_2 e^{i\omega_2 t}\right\}$$

13

$$\beta_i = \beta_i' + i\beta_i''$$

$$x_1(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\{2\beta_1' + \beta_2'\}$$
$$x_2(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\{\beta_1' - 2\beta_2'\}$$

ef $x_1(0) = -x_2(0)/2$

$\rightarrow \quad \beta_1' = 0$

$$\dot{x}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\{2\beta_1''\omega_1 + \beta_2''\omega_2\}$$
$$\dot{x}_2(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\{\beta_1''\omega_1 - 2\beta_2''\omega_2\}$$

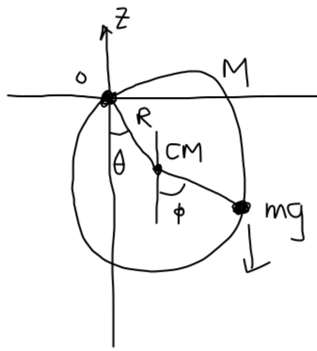
$\rightarrow \quad \beta_1'' = 0$

því fæst

$$x_1(t) = \frac{Re}{\sqrt{5}}\{\beta_2 e^{i\omega_2 t}\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\{\beta_2'\cos(\omega_2 t) - \beta_2''\sin(\omega_2 t)\}$$
$$x_2(t) = \frac{Re}{\sqrt{5}}\{-2\beta_2 e^{i\omega_2 t}\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\{-2\beta_2'\cos(\omega_2 t) + 2\beta_2''\sin(\omega_2 t)\}$$

14

Dæmi 4 Gjörð og frjáls perla



Hnitin eru

$$x = R\{\sin\theta + \sin\phi\}$$
$$y = -R\{\cos\theta + \cos\phi\}$$

Jacob Steiner:

$$I_0 = I_{CM} + MR^2 = 2MR^2$$

$$U = U_{arc} + U_m = \{-MgR\cos\theta\} + \{-mgR\cos\theta - mgR\cos\phi\}$$
$$= -MgR\cos\theta - mgR\{\cos\theta + \cos\phi\}$$

15

$$T = \underbrace{\frac{I_0\dot{\theta}^2}{2}}_{\text{gjörð}} + \underbrace{\frac{m}{2}\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2\}}_{\text{perla}}$$

$$\dot{x} = R\{\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\phi}\cos\phi\}$$
$$\dot{y} = R\{\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi\}$$

$$T = MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{2}\{(\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\phi}\cos\phi)^2 + (\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi)^2\}$$
$$\approx MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{2}\{\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} + \dot{\phi}^2\}$$

$$U \simeq \frac{MgR}{2}\theta^2 + \frac{mgR}{2}\{\theta^2 + \phi^2\}$$

Í lægstu nálgun fyrir hornin

16

Við erum að leita að línulegum sveifluháttum kerfisins

$$A\bar{a} = \omega^2 M\bar{a}$$

þá fást

$$M = MR^2\begin{pmatrix} 2+\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{m}{M}$$

$$A = MgR\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

því verður eigingildisverkefnið ekki venjulegt, heldur almenna útfærsla þess

$$A\bar{x} = \lambda B\bar{x}$$

17

Takið eftir að bæði fylkin, M og A, eru samhverf og jákvætt ákveðin.
Ef við leysum jöfnuna með því að finna andhverfuna á B eða M og margföldum með henni í gegnum jöfnuna þá verður eigingildisjafnan venjuleg, en ekki með samhverfu fylki! Samt er rétt að taka fram að eigingildin verða þau sömu, en samhverfuvandinn kemur fram í eiginvigrunum. Ósamhverf rauntölugild fylki eiga hægri og vinstri eiginvigra sem ekki eru eins.

Því er betra að leysa verkefnið með Cholesky LU þáttun:

Finnum
$$LL^T = B$$
Því þá gildir að
$$A\bar{a} = \lambda B\bar{a} = \lambda L\left(L^T\bar{a}\right)$$
$$L^{-1}A\bar{a} = \lambda\left(L^T\bar{a}\right)$$
$$\boxed{L^{-1}A\left(L^T\right)^{-1}\left(L^T\bar{a}\right) = \lambda\left(L^T\bar{a}\right)}$$

nýtt samhverft eigingildisverkefni

Eins má fara þá leið að finna fyrst hornrétta ummyndun sem kemur B (eða M) á hornalínuform, skala til nýju hnitin svo hornalínufylkið verði einingarfylki og finna svo aðra ummyndun fyrir A ...

18

$$M = MR^2\begin{pmatrix} 2+\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad L^T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad a = \sqrt{2+\alpha}, \quad b = \frac{\alpha}{\sqrt{2+\alpha}}, \quad c = \sqrt{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$$

$$\longrightarrow MR^2LL^T = M$$

$$A = MgR\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow L^{-1}A\left(L^T\right)^{-1} = MgR\begin{pmatrix} \frac{\alpha+1}{\alpha+2} & -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\sqrt{2\alpha(\alpha+1)}} \\ -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\sqrt{2\alpha(\alpha+1)}} & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2(\alpha+2)} + \frac{\alpha+2}{2} \end{pmatrix}$$

Samhverft $\longrightarrow$

19

Fylkið leiðir til eigingilda
$$\frac{\omega^2 R}{g} = \begin{cases} 1+\alpha \\ 1/2 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{g}{R}\left(1+\frac{m}{M}\right)} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{g}{2R}} \end{aligned}}$$

með eiginvigrum
$$\left(L^T\bar{a}_1\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \left(L^T\bar{a}_2\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2\alpha}}{(2\alpha^2+6\alpha+4)} \end{pmatrix}$$

Síðan er einfalt að ummynda til baka til að finna a_1 og a_2, sem eru eiginvigrar upphaflega samhverfa almenna eigingildisverkefnisins. Best er að kanna hættina þegar M=m og draga ályktanir þar af. Fyrri hátturinn er andsamhverfur, en sá síðari er massamiðjusveifluháttur. Þegar M≠m er vert að taka eftir massamiðjunni og hreyfingum hennar.