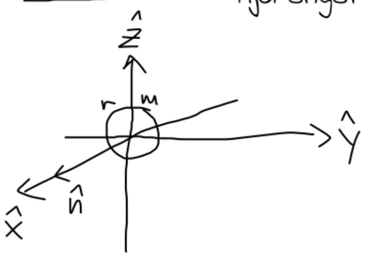
1

Dæmi 1

Hjól snýst um massamiðju með $\bar{\omega}_A = \omega_A \hat{n}$

$\bar{\omega}_B = \omega_B \hat{z}$



a) því er í kerfi hjólsins

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_A \\ 0 \\ \omega_B \end{pmatrix}$$

b) Höfuðásar (í kerfi hjólsins) eru

$\hat{e}_1$ með $I_1 = \frac{mr^2}{2}$

$\hat{e}_2$ og $\hat{e}_3$ með

$I_2 = I_3 = \frac{mr^2}{4}$

$$\rightarrow \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \frac{mr^2}{2}$$

2

$$\bar{L} = \mathbb{I} \cdot \bar{\omega} = \frac{mr^2}{2} \begin{pmatrix} \omega_A \\ 0 \\ \frac{\omega_B}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \bar{L} \nparallel \bar{\omega}$$

því $\bar{\omega}$ er ekki samsíða höfuðás

c) Hvaða vægi þarf til að viðhalda þessum snúningi?

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \tau,$$ en við þurfum $$\boxed{\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{space} = \left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{body} + \bar{\omega} \times \bar{L}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{space} = 0 + \bar{\omega} \times \bar{L} = \frac{mr^2}{2} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \omega_A & 0 & \omega_B \\ \omega_A & 0 & \frac{\omega_B}{2} \end{vmatrix} \leftarrow !$$

$$= -\hat{e}_2 \frac{mr^2}{2} \left\{ \frac{\omega_A \omega_B}{2} - \omega_A \omega_B \right\} = + \hat{e}_2 \frac{mr^2}{4} \omega_A \omega_B$$

3

Því er ytravægið sem viðheldur snúningnum gefið í hnitakerfi hjóls!

d) Finnið snúningsfylkið sem snýr fasta kerfinu í kerfi hjólsins.

Hér gæti manni fyrst dottið í hug að reyna að tákna snúningana tvo við horn Eulers og nota

$$\lambda_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

með

$$\phi = \omega_B t \quad \text{og} \quad \theta = \omega_A t$$

og setja saman $\lambda = \lambda_\theta \lambda_\phi$

en fylkin víxlast ekki $\boxed{[\lambda_\theta, \lambda_\phi] = \lambda_\theta \lambda_\phi - \lambda_\phi \lambda_\theta \neq 0}$

og hjólið snýst "samtímis" um þessi tvö horn

4

Snúningurinn er um ás $\hat{m} = \begin{pmatrix} \omega_A \\ 0 \\ \omega_B \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega_A^2 + \omega_B^2}} = \begin{pmatrix} m_1 \\ 0 \\ m_3 \end{pmatrix}$

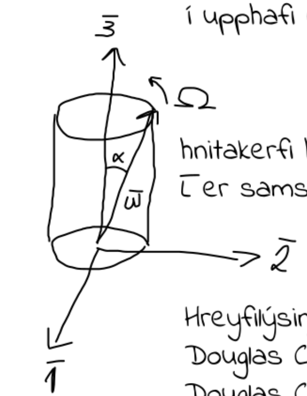
Spurningin er ekki í lagi því upplýsingar um upphafsgildi vantar, en ef við leyfum okkur að setja snúningshornið sem ωt, $\omega = \sqrt{\omega_A^2 + \omega_B^2}$

þá gefur wikipedia:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + m_1^2(1-\cos(\omega t)), & -m_3 \sin(\omega t), & m_1 m_3 (1-\cos(\omega t)) \\ m_3 \sin(\omega t), & \cos(\omega t), & -m_1 \sin(\omega t) \\ m_1 m_3 (1-\cos(\omega t)), & m_1 \sin(\omega t), & \cos(\omega t) + m_3^2(1-\cos(\omega t)) \end{pmatrix}$$

Dæmi 2

Samhverfur hlutur snýst án ytri krafts eða vægis, í upphafi er L í $\bar{2}$-$\bar{3}$ sléttu ($\bar{x}_2$-$\bar{x}_3$ í hnitakerfi hlutar)



hnitakerfi hlutar 1,2,3. 3 er samhverfuás hlutar, $\bar{L}$ er samsíða $\bar{x}'_3$ (í tregðukerfi rúmsins í kring)

Hreyfilýsing kerfisins er nokkuð flókin og er í kafla 13.20.1 hjá Douglas Cline, tæpt er á henni í fyrirlestri 20 bls. 1-5. Douglas Cline leiðir út hreyfijöfnuna

$$\boxed{\left(\frac{d\hat{e}_3}{dt}\right)_{space} = \frac{\bar{L}}{I_1} \times \hat{e}_3}$$

því er hornhraði samhverfuássins um $\bar{L}$

$$\boxed{\Omega_3 = \frac{L}{I_1}}$$

en, samkvæmt útleiðslu Douglas Cline gildir líka

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = 0 \\ L_2 = I_1 \omega \sin\alpha \\ L_3 = I_3 \omega \cos\alpha \end{array}\right\} \longrightarrow L = \omega\sqrt{(I_1 \sin\alpha)^2 + (I_3 \cos\alpha)^2}$$

og því fæst

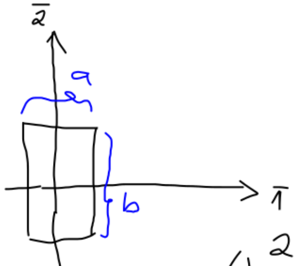
$$\boxed{\Omega_3 = \frac{\omega}{I_1}\sqrt{(I_1 \sin\alpha)^2 + (I_3 \cos\alpha)^2}}$$

.. en, skoðið endilega útleiðslu Douglas Cline

Dæmi 3

Þunn rétthyrnd plata með lengdir a og b.
Finnum vægið sem er nauðsynlegt til að hún snúist um hornalínuna með hornhraða ω

Sýnidæmi 13.4 í bók Douglas Cline gefur



$$I_{33} = \frac{M}{12}(a^2+b^2)$$

$$I_{11} = \frac{M}{12}b^2, \quad I_{22} = \frac{M}{12}a^2$$

$$\mathbb{I} = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\omega} = (a,b,0)\frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\bar{L} = \mathbb{I}\cdot\bar{\omega} = \frac{M\omega}{12\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} ab^2 \\ ba^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ef $a \neq b$ þá er $\bar{\omega}$ ekki samsíða höfuðás, og því eru $\bar{L}$ og $\bar{\omega}$ ekki samsíða
--> þurfum ytra vægi til að viðhalda snúningnum, þ.e. stefnu hans.
Þurfum að nota

$$\boxed{\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{space} = \left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{body} + \bar{\omega}\times\bar{L}}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\begin{cases} N_1 = I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ N_2 = I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ N_3 = I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{cases}}$$

$$\omega_3 = 0$$

$$\underbrace{\omega_1, \omega_2 \text{ fastar}}$$

$$N_1 = 0 \qquad N_3 = -(I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

$$N_2 = 0$$

því fæst

$$\boxed{N_3 = -\frac{M}{12}\left(b^2 - a^2\right)\frac{\omega^2}{a^2+b^2}ab}$$

Takið sérstaklega eftir að þetta ytra vægi er samhliða 3-ás plötunnar, en ekki í tregðukerfinu. Allir reikningar einfaldast þegar notað er hnitakerfi snúningshlutarins sjálfs, en ekki tregðukerfið. Ef við þurfum upplýsingarnar í tregðukerfinu verðum við að nota snúningsummyndun til þess.

Ef a=b þarf ekkert vægi til að viðhalda snúningsásnum, því þá er hann höfuðás, sem kerfið getur snúist frjálst um. Berið saman við hverfitregðu teningsins sem reiknuð er í bókinni

Dæmi 4

Samhverfur hlutur snýst "frjálst" um samhverfuás sinn og massamiðju. Snúningur um höfuðás

$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = N_3$$

og

$$N_3 = -b\omega_3 \quad \text{<-- Samhverfur hlutur -->} \quad I_1 = I_2$$

Hreyfijafnan verður því

$$I_3\dot{\omega}_3 + b\omega_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\dot{\omega}_3 + \frac{b}{I_3}\omega_3 = 0}$$

með lausn

$$\boxed{\omega_3 = \omega_0 \exp\left[-\frac{b}{I_3}t\right]} \quad \text{ef } \omega_3(0) = \omega_0$$

Fyrir snúðinn er þetta verulega flóknara mál þar sem

$$\omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

og því vaknar spurningin hvernig væri eðlilegast og raunsannast að gera líkan af núningi fyrir þessar breytur $\dot{\phi}$ og $\dot{\psi}$, eða þarf líka $\dot{\theta}$?

Einfalt er að finna verkfræðitexta um þetta á vefnum.